

# Cálculo de cargas críticas globais e deslocamentos de segunda ordem em estruturas reticuladas

## Computation of global critical loads and second order displacements in three-dimensional frames

Vitor Dias da Silva

### Resumo

No presente texto descreve-se a concepção, implementação e teste de um programa computacional de cálculo de cargas e modos de instabilidade de estruturas reticuladas tridimensionais, com base na formulação linearizada da relação entre o esforço axial e a rigidez de flexão de peças lineares comprimidas, a qual permite a formulação do problema como algébrico de valores próprios simétrico generalizado.

São apresentadas bases teóricas resumidas do problema em causa, bem como as vantagens e desvantagens da sua implementação nas formulações exacta e linearizada. Seguidamente descreve-se o programa, dando-se ênfase à introdução dos dados relevantes e à técnica de cálculo da matriz de rigidez da estrutura.

Seguidamente são apresentados exemplos ilustrativos, visando testar a exactidão dos resultados obtidos, a influência da não consideração da relação entre esforço axial e rigidez de torção de uma barra e o desempenho do programa numa estrutura com um número muito elevado de graus de liberdade.

Por último, através de exemplos com resultados exactos, é analisado o grau de precisão do cálculo não iterativo de deslocamentos de segunda ordem, utilizando a matriz de rigidez completa directamente a partir da configuração indeformada da estrutura.

### Abstract

In the present contribution the conception and implementation of a program for the computation of instability modes and loads of three-dimensional frames is presented. The linearized formulation of the relation between axial load and flexural stiffness is used, which leads to the formulation of the problem as an algebraic symmetric generalized eigenvalue problem.

The theoretical foundations of the algorithm are briefly presented, as well as the advantages and disadvantages of its implementation in the exact and linearized versions. Following this, the program is described, being emphasized the introduction of the problem data and the construction technique of the global stiffness matrix.

In the following section, examples are presented, with the objective of testing the accuracy of the computed results, the influence of non-considering the geometrical torsional stiffness and the performance of the program in a problem with a large number of degrees of freedom.

In the last section the computation of second order displacements, directly from the undeformed configuration, using the complete stiffness matrix is analyzed. The degree of precision of the delivered results is tested by comparing them with exact solutions in selected examples.

Vitor Dias da Silva

Professor Associado  
Departamento de Engenharia Civil  
Universidade de Coimbra  
Coimbra

## 1 Introdução

Na verificação da segurança de estruturas reticuladas o cálculo da carga crítica de instabilidade elástica desempenha um papel importante em estruturas esbeltas, ou constituídas por elementos esbeltos, como é frequentemente o caso das estruturas metálicas e também das constituídas pelos modernos compósitos.

No presente texto descreve-se a concepção e implementação de um programa computacional de cálculo da carga crítica global de uma estrutura reticulada tridimensional, em que o material se encontra em fase elástica linear. Uma vez que esta análise se fundamenta na consideração do efeito do esforço axial na rigidez de flexão das barras, o programa permite também um cálculo mais rigoroso de deslocamentos, como, por exemplo, no caso dos deslocamentos provocados por cargas horizontais em estruturas sujeitas a cargas verticais importantes.

## 2 Teoria base

### 2.1 Introdução

Quando uma estrutura atinge a carga crítica – transição entre a situação estável e a situação instável – é possível fazer variar a deformação da estrutura, sem que seja necessário alterar os esforços internos que equilibram as forças exteriores, ou seja, tem-se a situação de equilíbrio indiferente. No entanto, a variação de deformação que não altera o equilíbrio entre forças exteriores e esforços internos não é arbitrária, mas sim definida pelo chamado modo de instabilidade. A carga crítica corresponde à menor das cargas, para as quais se verifica equilíbrio indiferente.

Numa estrutura discretizada para análise pelo método dos deslocamentos, a relação entre um acréscimo infinitesimal do campo de deslocamentos e o correspondente acréscimo das forças nas coordenadas cinemáticas é definido pela matriz de rigidez, ou seja

$$\{dF\} = [K] \{dD\},$$

em que  $[K]$  representa a matriz de rigidez tangente da estrutura. De acordo com o exposto acima, na situação crítica é possível ter um valor não nulo de  $\{dD\}$ , sem alteração dos esforços internos, ou seja, com  $\{dF\} = \{0\}$ . Na situação crítica verifica-se, por conseguinte, a igualdade

$$[K] \{dD\} = \{0\}, \quad (1)$$

com elementos não nulos no vector  $\{dD\}$ . Esta constatação permite concluir que, na situação crítica, a matriz de rigidez é singular, pois, de outro modo, a condição (1) não poderia ser obedecida com elementos não nulos no vector  $\{dD\}$ . A determinação da carga crítica pelo método dos deslocamentos pode, por conseguinte, ser efectuada determinando o menor valor das cargas aplicadas que torna singular a matriz de rigidez.

Na verificação da segurança de estruturas reticuladas o cálculo da carga crítica de instabilidade elástica desempenha um papel importante em estruturas esbeltas, ou constituídas por elementos esbeltos, como é frequentemente o caso das estruturas metálicas e também das constituídas pelos modernos compósitos.

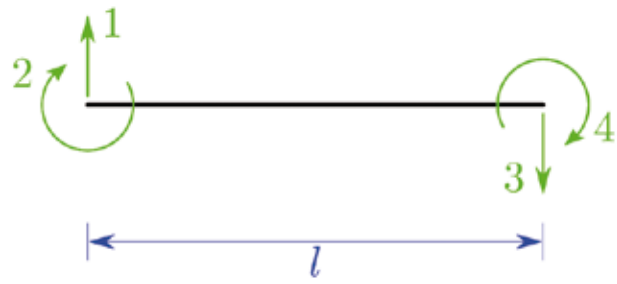


Figura 1 Graus de liberdade de flexão plana de um elemento barra.

A influência das cargas aplicadas na matriz de rigidez faz-se sentir quer directamente através das tensões, fazendo com que o material saia do regime linear e alterando assim o seu módulo de elasticidade tangente, quer através da influência dos esforços internos na componente geométrica da rigidez. Na análise aqui apresentada considera-se que o material não sai do regime elástico linear, pelo que a determinação da carga crítica se resume ao cálculo da influência dos esforços axiais na matriz de rigidez tangente da estrutura.

## 2.2 Rigidez de flexão de um elemento barra

Embora de um ponto de vista teórico não sejam de excluir modos de instabilidade por torção localizada de um elemento, resultante da interacção entre o esforço axial e o momento torsor, ou por deformação axial pura (isto é, sem flexão), a relevância prática destes modos de instabilidade é muito reduzida. Situação diferente é a que

resulta da interacção entre o momento flector e a rigidez de torção, a qual pode dar origem a instabilidade lateral (bambeamento). No entanto, este tipo de instabilidade tem geralmente um carácter local. Por estas razões, a determinação da carga crítica global de uma estrutura reticulada pode ser feita com boa aproximação considerando apenas a influência do esforço axial na componente geométrica da rigidez de flexão.

Quando se considera a interacção entre o esforço axial e a deformação por flexão, a matriz de rigidez de um elemento barra, com rigidez de flexão  $EI$ , sujeito a um esforço axial de compressão  $N$ , com os quatro graus de liberdade indicados na Figura 1, é dada pela expressão 2 (ver p. ex. [1]) Para um cálculo mais rigoroso da carga crítica convém contabilizar também o efeito benéfico das tracções na estabilidade da estrutura. No caso de o esforço axial ser de tracção, a expressão 2 é substituída pela expressão 3.

As expressões 2 e 3 são válidas enquanto as rotações forem suficientemente pequenas para poderem ser consideradas infinitesimais, ou, mais concretamente, enquanto a medida do ângulo de rotação se mantiver próxima do seu seno. Em termos práticos, o limite de aplicabilidade destas expressões é bastante alto, podendo considerar-se como seguro um limite de rotação de  $30^\circ$  [1].

A carga crítica de uma estrutura pode ser calculada avaliando o valor do determinante da matriz de rigidez da estrutura para valores

$$[K] = \frac{N}{2 - 2\cos(kl) - kl\sin(kl)} \times \begin{bmatrix} k \sin(kl) & \cos(kl) - 1 & k \sin(kl) & \cos(kl) - 1 \\ \cos(kl) - 1 & \frac{\sin(kl) - kl\cos(kl)}{k} & \cos(kl) - 1 & \frac{kl - \sin(kl)}{k} \\ k \sin(kl) & \cos(kl) - 1 & k \sin(kl) & \cos(kl) - 1 \\ \cos(kl) - 1 & \frac{kl - \sin(kl)}{k} & \cos(kl) - 1 & \frac{\sin(kl) - kl\cos(kl)}{k} \end{bmatrix} \quad \text{com } k = \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad (2)$$

$$[K] = \frac{N}{2 - 2\cosh(kl) + kl\sinh(kl)} \times \begin{bmatrix} k \sinh(kl) & 1 - \cosh(kl) & k \sinh(kl) & 1 - \cosh(kl) \\ 1 - \cosh(kl) & \frac{kl\cosh(kl) - \sinh(kl)}{k} & 1 - \cosh(kl) & \frac{\sinh(kl) - kl}{k} \\ k \sinh(kl) & 1 - \cosh(kl) & k \sinh(kl) & 1 - \cosh(kl) \\ 1 - \cosh(kl) & \frac{\sinh(kl) - kl}{k} & 1 - \cosh(kl) & \frac{kl\cosh(kl) - \sinh(kl)}{k} \end{bmatrix} \quad (3)$$

crecentes das forças aplicadas, identificando-se assim o valor da carga que o anula. O correspondente modo de instabilidade pode ser calculado estipulando um valor arbitrário  $d$  para o deslocamento no grau de liberdade  $i$  da estrutura e resolvendo o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1i} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & \cdots & K_{ii} & \cdots & K_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{ni} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ d \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix},$$

com  $K_{ii} = 1$  e  $K_{ij} = 0$  ( $j \neq i$ )

Este método é exacto, mas a sua utilização só é viável para um número relativamente pequeno de graus de liberdade. De facto, como as funções contidas na expressão 2 são descontínuas [1], passando de  $-\infty$  para  $+\infty$  quando o denominador passa por zero, os incrementos de carga têm que ser muito pequenos para detectar efectivamente a primeira passagem por zero do determinante de  $[K]$  e não uma subsequente. Além disso, o determinante da matriz de rigidez de uma estrutura com muitos graus de liberdade facilmente excede o valor máximo que pode ser tratado pelo computador ("overflow").

Nos problemas em que o material tem comportamento elástico linear, em que os deslocamentos são suficientemente pequenos para poderem ser considerados infinitesimais e em que o deslocamento num ponto qualquer da estrutura é função linear dos deslocamentos nas coordenadas cinemáticas, a rigidez material é constante e a geométrica é proporcional à carga. Nestas condições o problema pode ser formulado como problema algébrico de valores próprios, o que muito simplifica o tratamento numérico. No entanto, a última das três condições enunciadas não se verifica no problema aqui analisado, o que se reflecte na forma das expressões 2 e 3, em que não é possível identificar as parcelas material e geométrica. Este problema pode ser contornado linearizando as funções contidas nas expressões 2 e 3, como se expõe no parágrafo 2.3.

### 2.3 Linearização da matriz de rigidez

A fim de se obter uma formulação de valores próprios para o problema da determinação das cargas e modos de instabilidade, as funções que definem os elementos da matriz de rigidez em função do esforço axial são substituídas por rectas tangentes à curva nos pontos de abcissa nula ( $N = 0$ ). Neste caso as expressões 2 e 3 são substituídas por

$$[K] = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} + N \begin{bmatrix} \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{l}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

O valor de  $N$  é positivo em tracção. Pormenores do desenvolvimento podem ser encontrados, p. ex. em [1]. A matriz de rigidez apresenta

assim uma parcela independente do valor da carga aplicada – a rigidez material – e outra – a rigidez geométrica – proporcional ao esforço axial e independente do módulo de elasticidade do material. Nestas condições, o problema da determinação dos factores  $\lambda$ , pelos quais deve ser multiplicada a carga actuante, para se obterem situações de equilíbrio indiferente e correspondentes modos de deformação, pode ser formulado da seguinte maneira

$$\begin{aligned} [K] \{dD\} &= \{0\} \Rightarrow \\ ([K_m] + \lambda [K_g]) \{dD\} &= \{0\} \Rightarrow \\ [K_m] \{dD\} &= -\lambda [K_g] \{dD\}, \end{aligned} \quad (5)$$

Em que  $[K_m]$  e  $[K_g]$  representam a rigidez material e a rigidez geométrica da estrutura, respectivamente.

A última das expressões 5 pode facilmente ser colocada na forma correspondente ao problema algébrico de valores próprios simétrico generalizado

$$[A] \{z\} = \lambda' [B] \{z\}, \quad (6)$$

Em que as matrizes  $[A]$  e  $[B]$  são simétricas e  $[B]$  é positiva definida. As matrizes  $[K_m]$  e  $[K_g]$  são simétricas. Além disso, a matriz  $[K_m]$  é positiva definida. Assim, rearranjando a última das expressões 5, pode dar-se-lhe uma forma correspondente à expressão 6

$$\begin{cases} [A] = [K_g] \\ [B] = [K_m] \\ \{z\} = \{dD\} \\ \lambda' = -\frac{1}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [K_g] \{dD\} = -\frac{1}{\lambda} [K_m] \{dD\} \\ \Leftrightarrow [A] \{z\} = \lambda' [B] \{z\} \end{cases}$$

No programa computacional aqui apresentado, a resolução do problema algébrico de valores próprios, bem como a do sistema de equações correspondente à determinação dos esforços na estrutura pelo método dos deslocamentos, são efectuadas recorrendo à biblioteca LAPACK [2].

A linearização da matriz de rigidez introduz, obviamente, erros na solução. Esses erros podem porém ser minimizados até um valor desprezável, subdividindo as barras da estrutura. Desta maneira garante-se que os elementos da matriz de rigidez de cada barra só são utilizados numa gama de esforços axiais de compressão muito inferior ao valor crítico da barra. Nesta gama de esforços axiais, as curvas exactas e as correspondentes rectas de aproximação são praticamente coincidentes. Em [1] e [3] podem encontrar-se pormenores acerca da técnica de linearização e dos erros por ela introduzidos. Genericamente, pode afirmar-se que a subdivisão de cada barra da estrutura em três, praticamente anula o erro introduzido pela linearização.

## 3 O programa

### 3.1 O elemento barra

O sistema de eixos global  $x$ ,  $y$ ,  $z$  tem o eixo  $y$  vertical. O sistema de eixos do elemento barra  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  tem o eixo  $z'$  segundo o eixo da barra, com sentido definido pelos pontos nodais da extremidade da barra, como se indica na Figura 2.

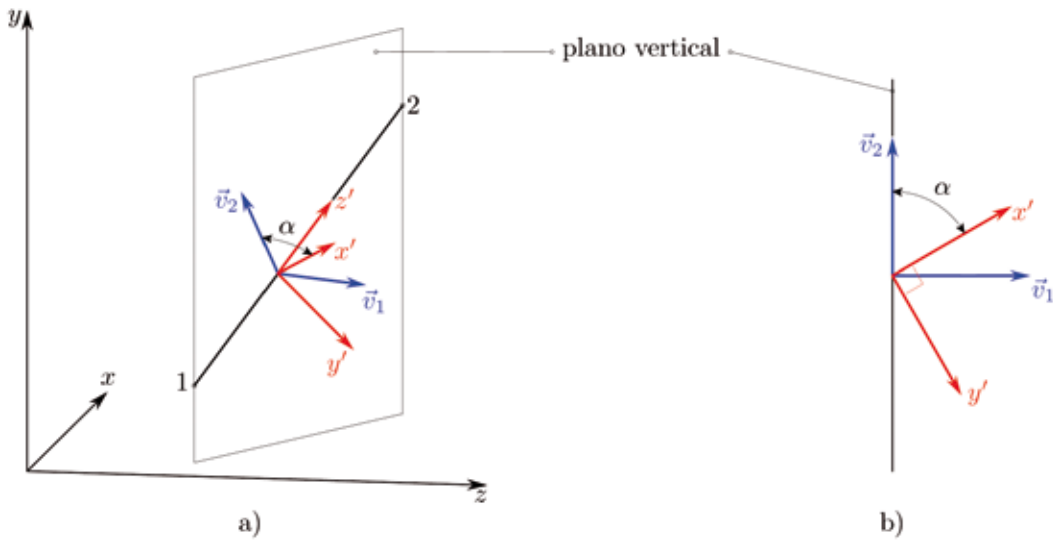


Figura 2 Sistema de eixos do elemento barra: a) perspectiva; b) projecção no plano perpendicular a  $z'$

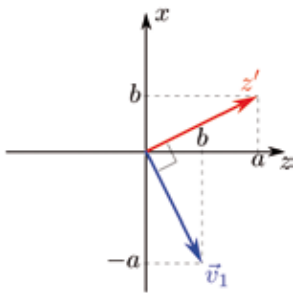


Figura 3 Projecção horizontal dos vectores  $z'$  e  $\vec{v}_1$

Os eixos  $x'$  e  $y'$  são eixos principais de inércia da secção transversal da peça. A orientação do eixo  $x'$  é definida pelo ângulo  $\alpha$  entre o eixo  $x'$  e o plano vertical que contém a barra. Este ângulo é medido entre o semieixo  $x'$  positivo e o plano vertical acima da barra e é positivo no sentido retrógrado, quando observado segundo o sentido positivo de  $z'$ . Na Figura 2 indicam-se estes eixos. Os vectores auxiliares  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  são, respectivamente, um vector horizontal perpendicular ao plano vertical que contém a barra e um vector do plano vertical, perpendicular a  $z'$ . Os cossenos directores do vector  $\vec{v}_1$  determinam-se facilmente através da projecção normalizada de  $z'$  no plano  $xz$  (Figura 3)

$$l_{v1} = -\frac{n_{z'}}{\sqrt{l_{z'}^2 + n_{z'}^2}} \quad m_{v1} = 0 \quad n_{v1} = \frac{l_{z'}}{\sqrt{l_{z'}^2 + n_{z'}^2}},$$

em que  $l, m$  e  $n$  representam os cossenos directores de cada vector no sistema de eixos global.

Efectuando o produto vectorial dos vectores  $\vec{v}_1$  e  $z'$ , obtém-se o vector  $\vec{v}_2$

$$l_{v2} = -m_{z'} \cdot n_{v1}$$

$$m_{v2} = -l_{v1} n_{z'} + l_{z'} n_{v1}$$

$$n_{v2} = l_{v1} m_{z'}$$

Os cossenos directores do eixo  $x'$  podem ser calculados através da definição de produto escalar, a qual permite definir o sistema de equações (Figura 2)

$$\begin{bmatrix} l_{z'} & m_{z'} & n_{z'} \\ l_{v1} & m_{v1} & n_{v1} \\ l_{v2} & m_{v2} & n_{v2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_{x'} \\ m_{x'} \\ n_{x'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix}$$

Da resolução deste sistema de equações lineares obtêm-se  $l_{x'}$ ,  $m_{x'}$  e  $n_{x'}$ . Finalmente, os cossenos directores do eixo  $y'$  são calculados através do produto vectorial dos vectores  $z'$  e  $x'$ .

$$l_{y'} = m_{z'} n_{x'} - m_{x'} n_{z'}$$

$$m_{y'} = -l_{z'} n_{x'} + l_{x'} n_{z'}$$

$$n_{y'} = l_{z'} m_{x'} - l_{x'} m_{z'}$$
(7)

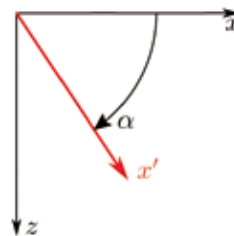


Figura 4 Definição do sistema de eixos no caso de barras verticais

No caso particular de a barra em causa ter eixo vertical, este método não pode ser usado. Neste caso, o eixo  $z'$  é paralelo ao eixo global  $y$ . A orientação do eixo principal de inércia da secção  $x'$  é definida pelo

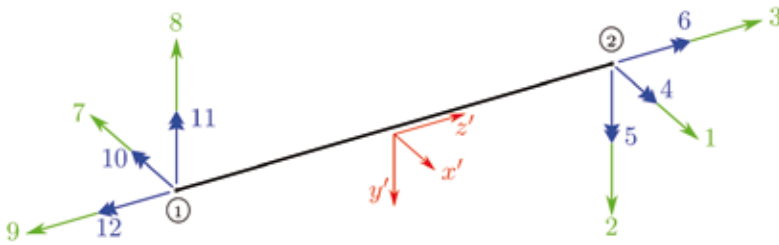


Figura 5 Graus de liberdade do elemento barra

ângulo  $\alpha$  entre os semieixos positivos  $x$  e  $x'$ , como se esquematiza na Figura 4. Este ângulo é positivo, quando progride de  $x$  para  $z$ , pelo que os cossenos directores de  $x'$  tomam os valores

$$l_{x'} = \cos \alpha \quad m_{x'} = 0 \quad n_{x'} = \sin \alpha.$$

Os cossenos directores de  $y'$  são calculados através da expressão 7.

O elemento barra tem os graus de liberdade representados na Figura 5. Nesta figura os graus de liberdade de rotação são representados por setas duplas.

Os elementos da matriz de rigidez da barra em que intervêm as rigidezes de flexão são

$$\begin{bmatrix} k_{2,2}^m & k_{2,4}^m & k_{2,8}^m & k_{2,10}^m \\ k_{4,2}^m & k_{4,4}^m & k_{4,8}^m & k_{4,10}^m \\ k_{8,2}^m & k_{8,4}^m & k_{8,8}^m & k_{8,10}^m \\ k_{10,2}^m & k_{10,4}^m & k_{10,8}^m & k_{10,10}^m \end{bmatrix} = EI_{x'} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & -\frac{2}{l} \\ \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & -\frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix}$$

para a rigidez material no plano  $y'z'$ ,

$$\begin{bmatrix} k_{2,2}^g & k_{2,4}^g & k_{2,8}^g & k_{2,10}^g \\ k_{4,2}^g & k_{4,4}^g & k_{4,8}^g & k_{4,10}^g \\ k_{8,2}^g & k_{8,4}^g & k_{8,8}^g & k_{8,10}^g \\ k_{10,2}^g & k_{10,4}^g & k_{10,8}^g & k_{10,10}^g \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{l}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \end{bmatrix},$$

para a rigidez geométrica no plano  $y'z'$ ,

$$\begin{bmatrix} k_{1,1}^m & k_{1,5}^m & k_{1,7}^m & k_{1,11}^m \\ k_{5,1}^m & k_{5,5}^m & k_{5,7}^m & k_{5,11}^m \\ k_{7,1}^m & k_{7,5}^m & k_{7,7}^m & k_{7,11}^m \\ k_{11,1}^m & k_{11,5}^m & k_{11,7}^m & k_{11,11}^m \end{bmatrix} = EI_{y'} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{2}{l} \\ \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix},$$

para a rigidez material no plano  $z'x'$  e

$$\begin{bmatrix} k_{1,1}^g & k_{1,5}^g & k_{1,7}^g & k_{1,11}^g \\ k_{5,1}^g & k_{5,5}^g & k_{5,7}^g & k_{5,11}^g \\ k_{7,1}^g & k_{7,5}^g & k_{7,7}^g & k_{7,11}^g \\ k_{11,1}^g & k_{11,5}^g & k_{11,7}^g & k_{11,11}^g \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & -\frac{1}{10} & \frac{l}{30} \\ \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{l}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \end{bmatrix},$$

para a rigidez geométrica no plano  $z'x'$ . Os elementos da matriz de rigidez da barra respeitantes às deformações axiais e de torção são, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} k_{3,3} & k_{3,9} \\ k_{9,3} & k_{9,9} \end{bmatrix} = \frac{E\Omega}{l} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{e}$$

$$\begin{bmatrix} k_{6,6} & k_{6,12} \\ k_{12,6} & k_{12,12} \end{bmatrix} = \frac{GJ}{l} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na deformação axial a rigidez geométrica é nula, pois a alteração de geometria por ela introduzida na barra não altera os esforços provocados pelo esforço axial. No que diz respeito aos graus de liberdade de torção, embora possa existir interacção entre a deformação por torção e o momento tórsor provocado pelo esforço axial na situação deformada, a correspondente rigidez geométrica toma valores desprezáveis, como se ilustra no segundo dos exemplos apresentados no parágrafo 4.

### 3.2 Montagem das matrizes de rigidez globais

As matrizes de rigidez, material e geométrica, referentes às coordenadas globais da estrutura são calculadas recorrendo à chamada *matriz de incidência*  $[C]$

$$[K] = [C]^t [K_a] [C]$$

$$\text{com } [K_a] = \begin{bmatrix} [K_1] & & & \\ & [K_2] & & \\ & & \dots & \\ & & & [K_{nb}] \end{bmatrix},$$

em que as submatrizes  $[K_j]$  são as matrizes de rigidez de cada

barra referidas às suas coordenadas locais. Os elementos da matriz de incidência correspondentes à barra  $i$  representam-se no Quadro 1. A quantidade  $i_0$  toma o valor  $i_0 = 12(i - 1)$ ,  $j_1, \dots, j_6$  são os graus de liberdade globais (três de translação e três de rotação) do nó correspondente à extremidade 1 da barra e  $j_7, \dots, j_{12}$  os do nó correspondente à extremidade 2. Como é óbvio, se alguns destes graus de liberdade estiverem restringidos, não existirão as correspondentes colunas da matriz de incidência.

**Quadro 1** Elementos da matriz de incidência correspondentes à barra  $i$

	$j_1$	$j_2$	$j_3$	$j_4$	$j_5$	$j_6$	$j_7$	$j_8$	$j_9$	$j_{10}$	$j_{11}$	$j_{12}$
$i_0 + 1$							$l_{x'}$	$m_{x'}$	$n_{x'}$			
$i_0 + 2$							$l_{y'}$	$m_{y'}$	$n_{y'}$			
$i_0 + 3$							$l_{z'}$	$m_{z'}$	$n_{z'}$			
$i_0 + 4$										$l_{x'}$	$m_{x'}$	$n_{x'}$
$i_0 + 5$										$l_{y'}$	$m_{y'}$	$n_{y'}$
$i_0 + 6$										$l_{z'}$	$m_{z'}$	$n_{z'}$
$i_0 + 7$	$-l_{x'}$	$-m_{x'}$	$-n_{x'}$									
$i_0 + 8$	$-l_{y'}$	$-m_{y'}$	$-n_{y'}$									
$i_0 + 9$	$-l_{z'}$	$-m_{z'}$	$-n_{z'}$									
$i_0 + 10$				$-l_{x'}$	$-m_{x'}$	$-n_{x'}$						
$i_0 + 11$				$-l_{y'}$	$-m_{y'}$	$-n_{y'}$						
$i_0 + 12$				$-l_{z'}$	$-m_{z'}$	$-n_{z'}$						

#### 4 Exemplos de determinação da carga crítica

O primeiro dos exemplos apresentados visa testar a exactidão do cálculo e o método de introdução dos dados do problema. Para isso, considerou-se um pilar em consola, cujo eixo é inclinado em relação aos eixos globais de referência, com o fim de fazer intervir todos os elementos das matrizes de rigidez do elemento barra na montagem das matrizes de rigidez globais da estrutura. O eixo  $x$  da sua secção transversal faz um ângulo  $\alpha = 60^\circ$  (Figura 2-b) com o plano vertical que contém a barra. A topologia do problema encontra-se representada na Figura 6.

Para a secção transversal considerou-se um perfil INP 80, cujas características geométricas são:

$$\Omega = 7,58 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \quad I_x = 77,8 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

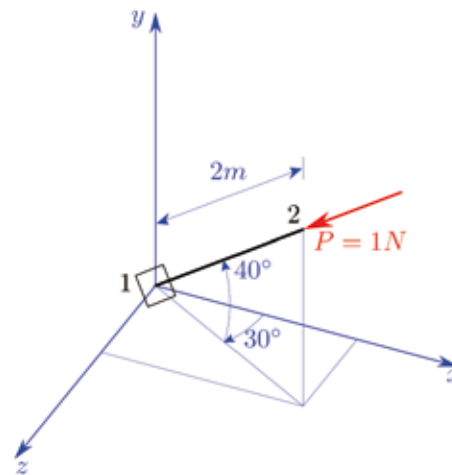
e

$$I_y = 6,29 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \quad J = 0,93 \times 10^{-8} \text{ m}^2$$

em que  $\Omega$  representa a área da secção transversal da peça e  $J$  o parâmetro geométrico da rigidez de torção.

Considerou-se um módulo de elasticidade  $E = 206 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ . A carga crítica de Euler desta barra é então

$$l_e = 2l = 4m \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{l_e^2} = \frac{\pi^2 \times 206 \times 10^9 \times 6,29 \times 10^{-8}}{4^2} = 7.992,7758 \text{ N}.$$



**Figura 6** Topologia do exemplo 1

O segundo modo de encurvadura corresponde à flexão em torno do eixo  $x$  da secção transversal com a carga

$$P = \frac{\pi^2 EI_x}{l_e^2} = \frac{\pi^2 \times 206 \times 10^9 \times 77,8 \times 10^{-8}}{4^2} = 98.861,360 \text{ N}.$$

Os cossenos directores do eixo da barra tomam os valores:

$$l = \cos(40^\circ) \cos(30^\circ) = 0,6634139$$

$$m = \sin(40^\circ) = 0,6427876$$

$$n = \cos(40^\circ) \cos(60^\circ) = 0,3830222.$$

Os dados do problema são introduzidos através do texto indicado no Quadro 2.

**Quadro 2** Dados do problema da figura 6.

```

2 !nbn x0      y0      z0
1      0.      0.      0.
2      1.326827896 1.285575219 0.766044443
0 ! Px,      Py,      Pz      Mx, My, Mz
1      0.      0.      0.      0. 0. 0.
2      -0.663413948 -0.64278761 -0.383022222 0. 0. 0.
0 ! itx ity itz irx iry irz (graus de liberdade dos pontos nodais)
1      0 0 0 0 0 0
2      1 1 1 1 1 1
1 ! nb1 nb2 área Ix Iy J alfa
1      1 2 7.58e-4 77.8e-8 6.29e-8 0.93e-8 60.
206.e9 ! módulo de elasticidade
79.2e9 ! módulo de distorção
50. ! factor de amplificação geométrica
10 ! nº de subdivisões de cada barra

```

Na Figura 7 apresentam-se os dois primeiros modos de instabilidade, obtidos com a subdivisão da barra em dez. Na Figura 7-b pode constatar-se que o primeiro modo de instabilidade se verifica por flexão em torno do eixo de menor inércia da secção (eixo  $y$  da secção transversal), pois o plano da deformada faz  $60^\circ$  com o plano vertical.

Como foi referido, em consequência da linearização dos coeficientes de rigidez, os valores obtidos para a carga crítica e para as cargas correspondentes aos modos de instabilidade superiores são valores

aproximados. A fim de ilustrar o erro cometido, foi efectuado o cálculo para diversos valores da subdivisão da barra, tendo-se obtido para os dois primeiros modos os valores indicados no Quadro 3 (valores em *newtons*). Confirma-se assim que a subdivisão da barra em três conduz a uma solução muito próxima da exacta.

Quadro 3

N.º de subdivisões	1.º modo	2.º modo
1	8.052,8999	99.605,028
2	7.996,8691	98.911,991
3	7.993,5981	98.871,532
4	7.993,0369	98.864,599
6	7.992,8259	98.861,981
8	7.992,7916	98.861,555
10	7.992,7821	98.861,442
15	7.992,7766	98.861,373
20	7.992,7756	98.861,361
exacto	7.992,7758	98.861,360

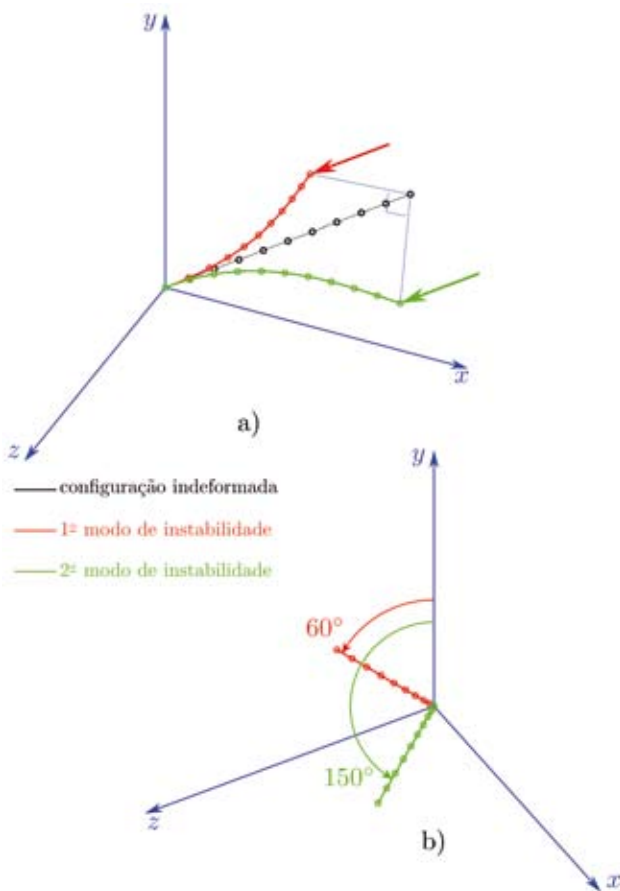


Figura 7 1º e 2º modos de instabilidade do exemplo 1: a) perspectiva; b) projecção no plano perpendicular ao eixo da barra

No segundo exemplo (Figura 8) ilustra-se o cálculo da carga crítica de uma estrutura simples, e ausculta-se a influência da rigidez geométrica de torção no valor da carga crítica global. Para isso, considera-se que as barras da estrutura têm a secção cruciforme representada na Figura 8-b. Os pontos *A* e *B* estão impedidos de se deslocar na direcção *z*. Além disso, o ponto *A* está impedido de rodar em torno do eixo *y*. Considerando que se trata de uma secção de paredes finas, a sua área e momentos de inércia tomam os valores

$$\begin{cases} d = 5 \text{ cm} \\ e = 0,5 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Omega = 10 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ I_x = I_y = 41,77 \times 10^{-8} \text{ m}^4 \end{cases}$$

Neste tipo de secção é fácil determinar a rigidez geométrica de torção em função do esforço axial (ver p.ex. [1], exemplo XI.14). As parcelas material e geométrica desta rigidez são

$$\begin{aligned} \frac{M_t}{\theta} &= \frac{4}{3} de^3 G + \frac{4}{3} \frac{d^3 e}{\Omega} N \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} J = \frac{4}{3} de^3 \\ k_{6,6}^g = k_{6,12}^g = k_{12,12}^g = k_{12,6}^g = \frac{4}{3} \frac{d^3 e}{\Omega} N, \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

em que  $\theta$  representa a rotação relativa de duas secções afastadas de uma unidade de comprimento e  $G$  o módulo de distorção do material. A estrutura é de aço ( $E = 206 \times 10^9 \text{ Pa}$  e  $G = 79,2 \times 10^9 \text{ Pa}$ ).

O cálculo da carga crítica foi efectuado com e sem consideração da rigidez geométrica de torção, tendo-se obtido resultados praticamente coincidentes, excepto nos modos de instabilidade correspondentes à torção localizada de barras. Na estrutura da Figura 8 o modo mais baixo em que isso se verifica é o 7 (com subdivisão de cada barra em duas), a que corresponde uma carga  $P = 264.259,836 \text{ N}$ . Este valor da carga anula a rigidez de torção da barra *BC*, sendo facilmente verificado através da expressão 8 (o esforço axial nesta barra é aproximadamente  $3P$ , anulando-se a sua rigidez de torção com um esforço axial de compressão de  $792.000 \text{ N}$ ). Na Figura 9 apresenta-se o primeiro modo de instabilidade, a que corresponde a carga crítica  $P = 6.898,00563 \text{ N}$ . Este valor foi obtido sem consideração da rigidez geométrica de torção. Considerando esta parcela da rigidez, obtém-se um valor praticamente coincidente com este ( $P = 6.897,34721 \text{ N}$ ). Um cálculo exacto, efectuado através do método da anulação do determinante, utilizando as matrizes de rigidez indicadas nas expressões 2 e 3, fornece o valor  $P = 6.897,70861 \text{ N}$ , se não for considerada a rigidez geométrica de torção e  $P = 6.897,05001 \text{ N}$ , se esta for considerada. O facto de o valor obtido através do problema de valores próprios (rigidez linearizada) estar tão próximo do valor exacto, apesar de terem considerado apenas dois elementos por barra, é consequência de se tratar de um modo de instabilidade verdadeiramente global, com a deformação distribuída por toda a estrutura e valores do esforço axial nas barras comprimidas muito inferiores às suas cargas críticas de Euler.

Como se referiu no início do parágrafo 2.2, esta análise não inclui fenómenos de instabilidade lateral de barras (bambeamento), pois



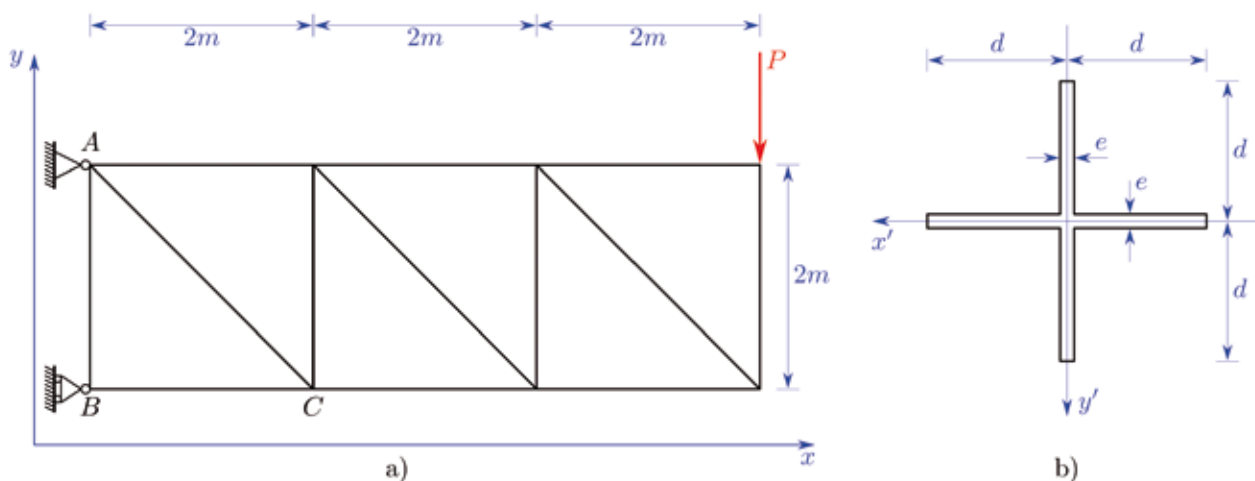


Figura 8 Exemplo 2: a) topologia; b) secção transversal das barras

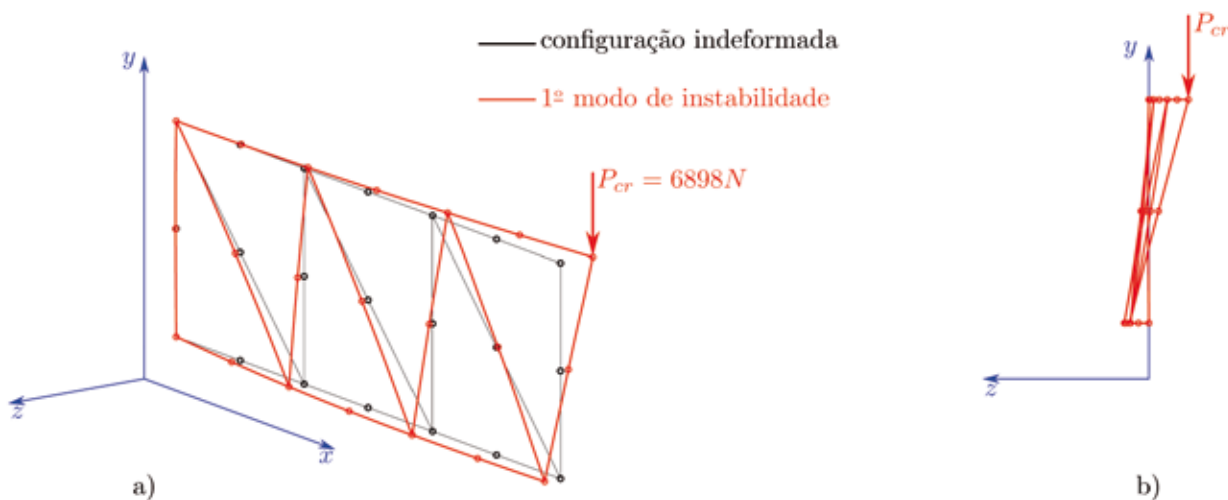


Figura 9 1º modo de instabilidade do exemplo 2: a) perspectiva; b) projecção no plano yz

nesse tipo de instabilidade, marcadamente local, intervém a influência do momento flector na rigidez de torção, a qual não é considerada na presente análise. No entanto, é óbvio que o tipo de instabilidade representado na Figura 9 corresponde ao bambeamento da viga em treliça constituída pela estrutura em análise.

O terceiro exemplo visa ilustrar o desempenho do programa numa estrutura com um número de graus de liberdade muito elevado. Trata-se neste caso da grua representada na Figura 10. As barras verticais da torre e as horizontais da lança são constituídas por perfis HEB160. As barras diagonais de toda a estrutura têm secção tubular com diâmetro exterior variável entre 42 mm e 60 mm e espessuras entre 3,5 mm e 5 mm. As barras longitudinais da lança são perfis rectangulares fechados de parede fina com 5 mm de espessura e dimensões exteriores de 90 × 90 mm<sup>2</sup> (barra de topo) e 60 × 100 mm<sup>2</sup> (base da lança). Os cabos têm 36 mm de diâmetro. As principais dimensões e cargas estão representadas na figura. Além destas cargas foi considerado o peso próprio das barras.

A fim de detectar, com rigor, possíveis modos de instabilidade local nas barras com menor secção, todas as barras diagonais foram subdivididas em duas.

Esta discretização conduziu a um modelo com 1539 barras e 5700 graus de liberdade. Foram calculados todos os modos de instabilidade correspondentes a esta discretização, tendo o cálculo sido efectuado, com precisão dupla, em cerca de 7,3 horas num computador com processador Pentium III a 1GHz e sistema operativo Unix (Linux).

A carga crítica da estrutura atinge-se com um factor de carga de 4,084. Como se verifica na Figura 11, trata-se de um modo de instabilidade global, pois não há encurvadura localizada de elementos da estrutura. O primeiro modo em que se verifica localização da instabilidade é o sexto, a que corresponde um factor de carga de 8,145. Neste, verifica-se encurvadura localizada da escora, provocada pela compressão correspondente à componente vertical dos esforços nos cabos (Figura 11).

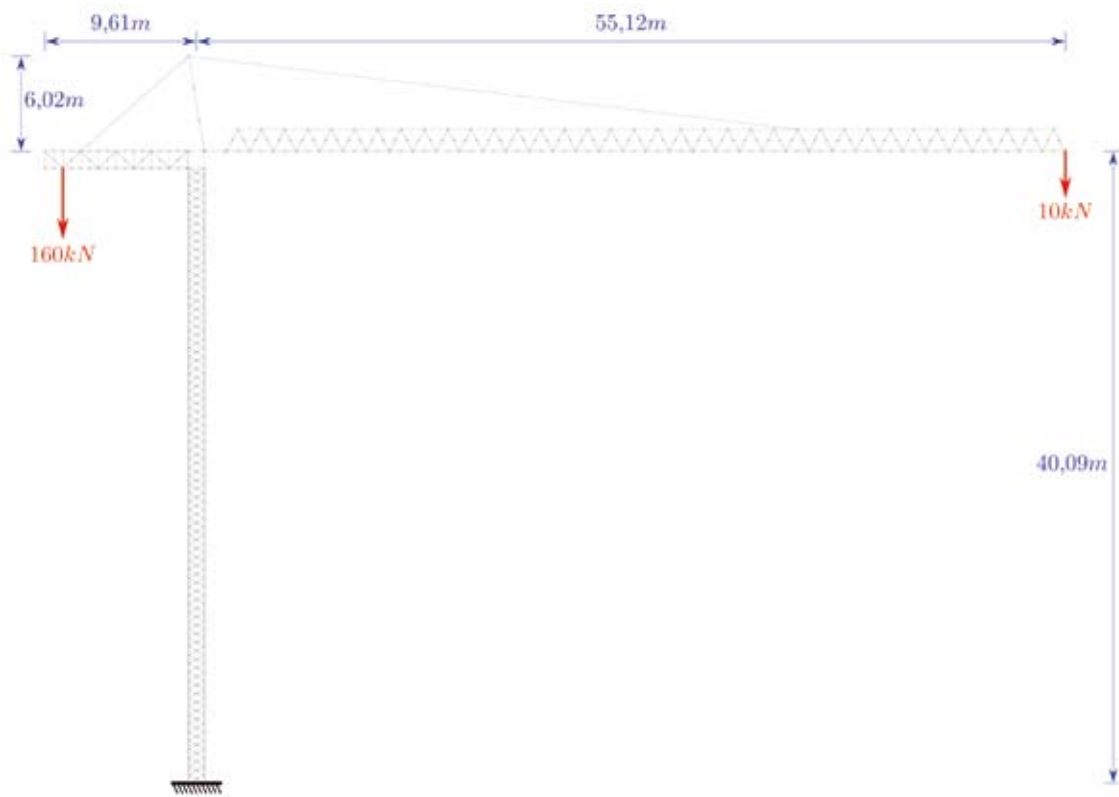


Figura 10 Geometria, cargas e principais dimensões do exemplo 3

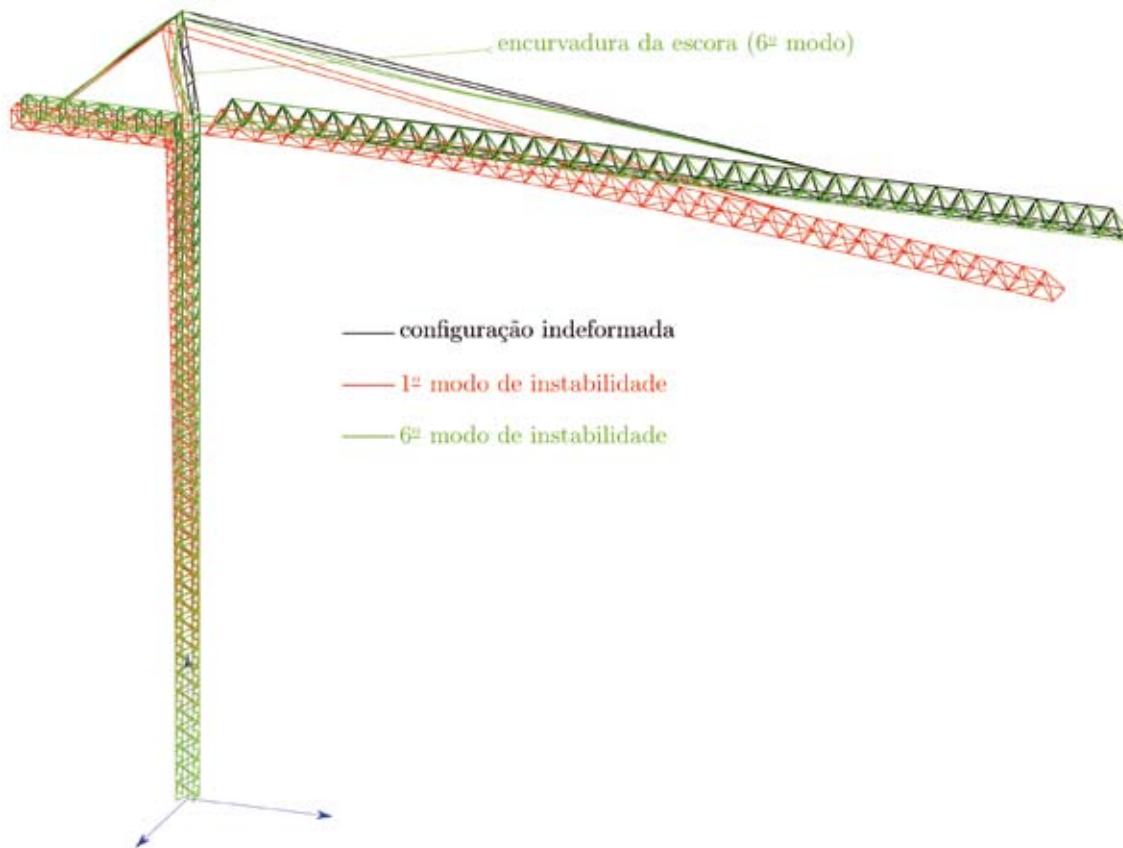


Figura 11 1º e 6º modos de instabilidade da estrutura da Figura 10

## 5 Cálculo de deslocamentos

O cálculo de deslocamentos de segunda ordem, isto é, considerando a interacção entre esforços e deformações em estruturas reticuladas, é geralmente efectuado com recurso a processos iterativos, nos quais o vector que define os deslocamentos nas coordenadas cinemáticas é sucessivamente melhorado, até que o equilíbrio entre as forças actuantes e os esforços internos, na configuração deformada, seja atingido com um grau de precisão pré-definido.

No presente parágrafo analisa-se porém a qualidade dos resultados fornecidos pelo método não iterativo traduzido pela aplicação directa da matriz de rigidez resultante das matrizes elementares exacta (expressões 2 e 3) ou linearizada (expressão 4). Trata-se de um método com apenas dois passos de cálculo, nomeadamente

1. cálculo dos esforços axiais nas barras, considerando nula a rigidez geométrica;
2. cálculo da matriz de rigidez completa (isto é, considerando também a rigidez geométrica) e correspondentes deslocamentos nodais, através da resolução do sistema de equações clássico do método dos deslocamentos  $[K] \{D\} = \{F\}$ , a partir da configuração indeformada da estrutura.

Os deslocamentos assim calculados incluem a interacção entre esforços e deformações, uma vez que os coeficientes de rigidez contidos nas expressões 2 e 3 são calculados pressupondo que as cargas aplicadas acompanham o movimento dos nós [1]. Este processo de cálculo tem as vantagens de ser quase tão simples como uma análise linear e de não levantar o problema da convergência, que necessariamente se põe num método iterativo. Este método dá bons resultados nos casos em que a deformação não altera significativamente a distribuição de esforços axiais calculados através de uma análise linear, pois a relação entre esforços e deslocamentos é linear, mesmo considerando a interacção entre estas grandezas, desde que o esforço axial seja constante. No caso da barra representada na Figura 12 a relação entre as forças  $M$  e  $T$  e os deslocamentos  $\theta$  e  $\delta$  é dada pelas expressões (para pormenores do desenvolvimento consultar [1])

$$\begin{cases} \frac{k \sin(kl)}{N} M + \frac{kl \sin(kl) + \cos(kl) - 1}{N} T = \theta - \delta k \sin(kl) \\ \frac{1 - \cos(kl)}{N \cos(kl)} M + \frac{\tan(kl) - kl}{kN} T = \delta \end{cases}$$

com  $k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$ , sendo  $EI$  a rigidez de flexão da barra.

Este sistema de equações é claramente linear para  $N$  constante.

No procedimento atrás descrito a segunda matriz de rigidez (a que inclui a rigidez geométrica) pode encarar-se como uma rigidez secante relativa à configuração indeformada, quando usada no cálculo directo de deslocamentos de segunda ordem, embora seja uma rigidez tangente na configuração deformada da estrutura.

Os resultados fornecidos pelo método directo de cálculo de deslocamentos de segunda ordem atrás descrito são seguidamente comparados com os fornecidos por um método iterativo baseado numa formulação lagrangiana total, desenvolvido para problemas

bidimensionais, em que as deformações são pequenas, mas em que não existe limitação para os valores das rotações e deslocamentos. Este método pode ser encarado como exacto, desde que a discretização em elementos finitos seja suficientemente fina, uma vez que não se verifica a acumulação de erros que aparece numa formulação lagrangiana actualizada, em que se consideram pequenas deformações nos incrementos de carga. O método está descrito em pormenor na referência [4].

Como primeiro exemplo de teste, considere-se a estrutura plana representada na Figura 13. Os momentos de inércia das barras verticais e horizontal são, respectivamente,  $2.000 \text{ cm}^4$  e  $5.000 \text{ cm}^4$ . Para a área de secção transversal foi usado o valor de  $2.000 \text{ cm}^2$  para todas as barras. A estrutura é de aço ( $E = 206 \times 10^9 \text{ Pa}$ ). A carga crítica da estrutura com o carregamento indicado, calculada com subdivisão de cada barra em 10 é  $P = 63.884,26 \text{ N}$ . O valor exacto, calculado através do método da anulação do determinante é  $P = 63.883,85 \text{ N}$ . Na Figura 14 comparam-se as relações entre o valor de  $P$  e o deslocamento horizontal do ponto de aplicação desta carga, considerando três abordagens:

- a iterativa sem limitação do valor das rotações e deslocamentos, que pode ser considerada exacta; foram também usados 10 elementos por barra;
- a linear, que só dá resultados aceitáveis para valores baixos da carga  $P$ ;
- o método em análise no presente trabalho; foram usadas as matrizes de rigidez exactas (saliente-se no entanto que os resultados obtidos com a rigidez linearizada são praticamente coincidentes com estes, dado o elevado número de elementos por barra).

Constata-se que este último, apesar de ser um método directo baseado na configuração indeformada da estrutura, conduz a resultados muito bons para valores da carga inferiores a cerca de 90% da carga crítica. Verifica-se ainda da solução exacta que a estrutura suporta valores da carga superiores à carga crítica calculada através da análise linear de estabilidade elástica descrita na parte inicial deste trabalho. De facto, nesta estrutura não se verifica instabilidade em fase elástica, ou seja a matriz de rigidez tangente calculada na configuração deformada, sem a limitação de pequenas rotações, não se torna singular, mesmo para deformações substancialmente superiores às indicadas nas Figuras 14 e 15. Na Figura 15 representam-se as configurações deformadas correspondentes a  $P = 57.500 \text{ N}$  a que corresponde um deslocamento horizontal do ponto de aplicação desta carga de 877 mm (solução exacta). Pode verificar-se que o facto de serem consideradas pequenas rotações na dedução das expressões 2 e 3, faz com que o deslocamento vertical calculado para o ponto de aplicação da carga  $P$  através destas expressões seja nulo, mesmo com deslocamento horizontal significativo. Pelo contrário, na solução exacta este deslocamento vertical é claramente visível.

O método de cálculo de deslocamentos de segunda ordem aqui analisado não constitui uma mera amplificação dos deslocamentos obtidos através de uma análise geometricamente linear. De facto, com este método podem ser captadas alterações no padrão de deslocamentos resultantes da interacção entre deformações e esforços, que só aparecem quando são tidas em conta as condições de equilíbrio entre esforços internos e forças exteriores na configuração

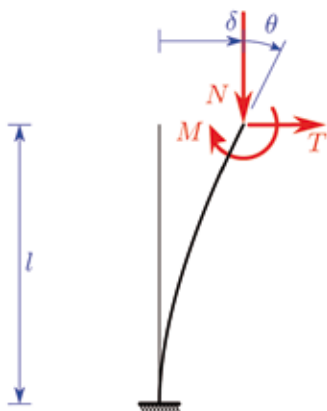


Figura 12 Forças e deslocamentos na configuração deformada de um pilar em consola

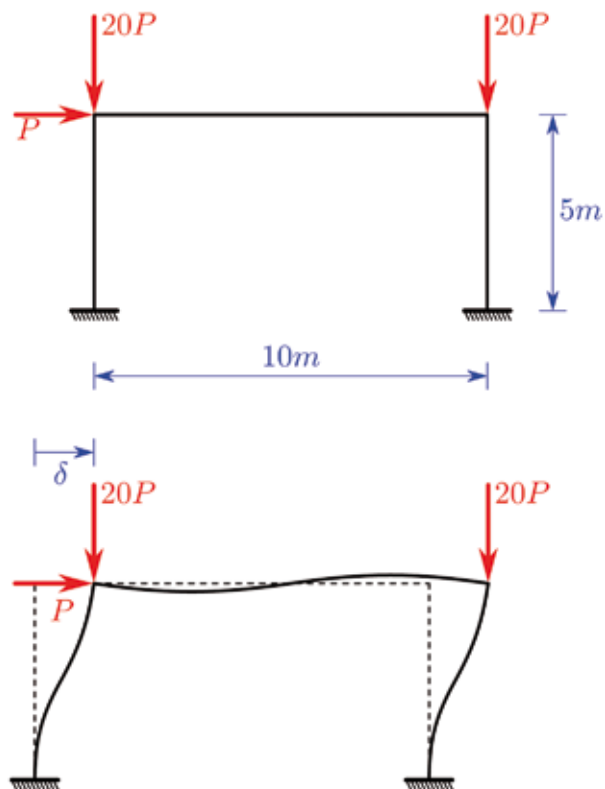


Figura 13 Deformação horizontal de um pórtico sujeito a cargas verticais elevadas

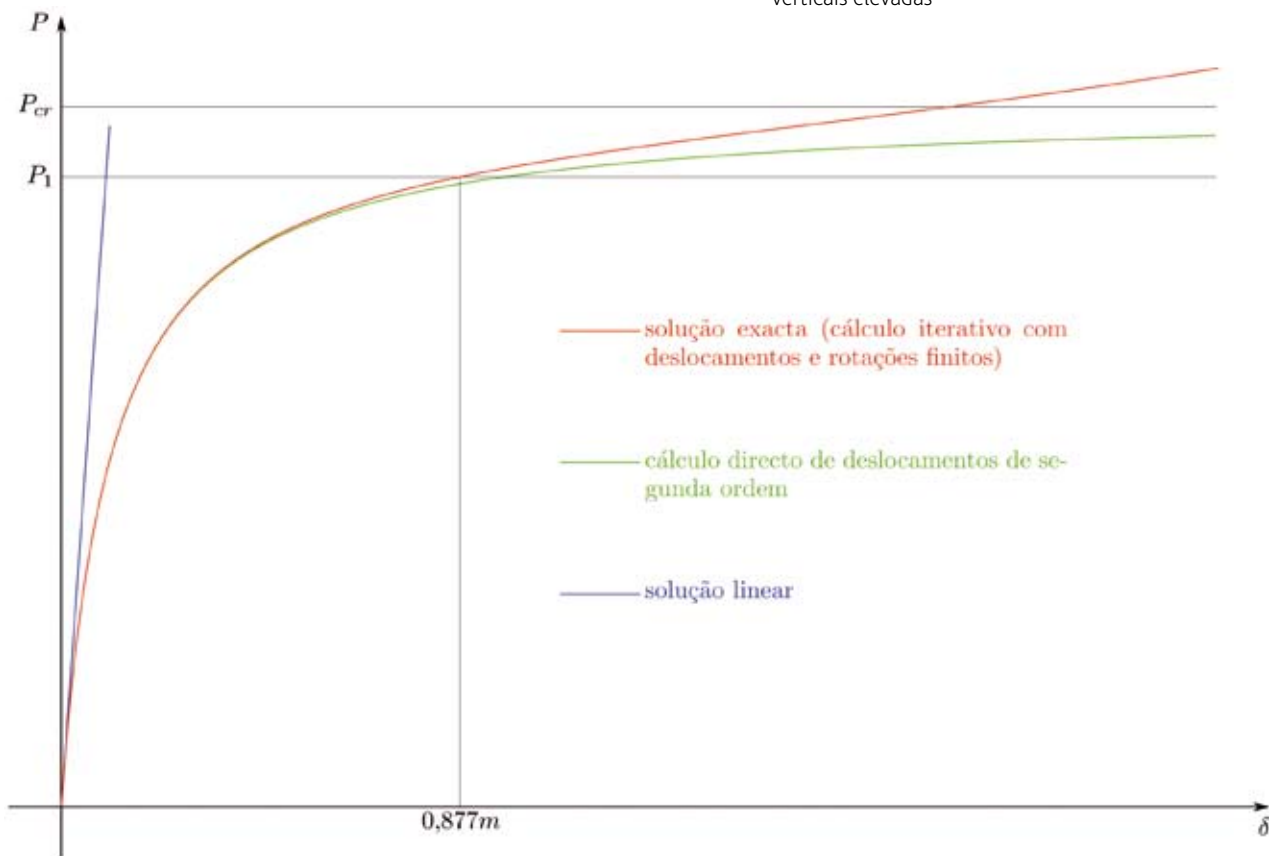
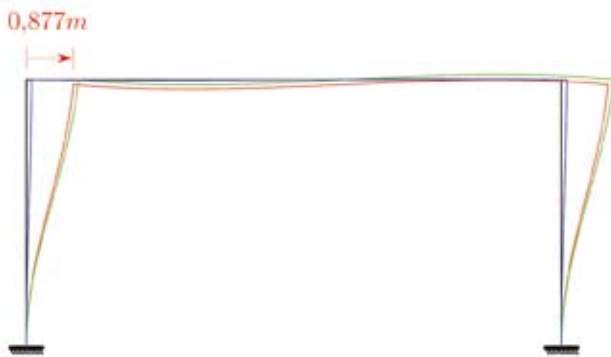
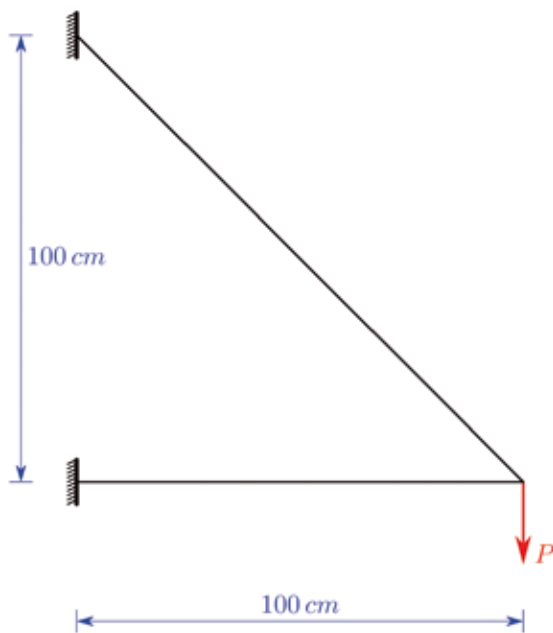


Figura 14 Relação entre  $P$  e  $\delta$  na estrutura representada na Figura 13 ( $P_1 = 57.500 \text{ N} \cong 0,9 P_{cr}$ )



**Figura 15** Configurações deformadas da estrutura da Figura 13, correspondentes às soluções indicadas na Figura 14 para  $P = 57.500 N$



**Figura 16** Treliza plana simples

deformada. No segundo dos exemplos aqui expostos ilustra-se este facto e testa-se o resultado obtido através do método em análise, comparando-o com o fornecido pelo mesmo método exacto que foi usado no primeiro exemplo. Assim, considere-se a estrutura plana representada na Figura 16. As duas barras têm a mesma secção com uma área de  $2,21 \text{ cm}^2$  e um momento de inércia de  $0,38 \text{ cm}^4$  e são constituídas por aço ( $E = 206 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$ ). A carga crítica desta estrutura, calculada com subdivisão de cada barra em 10, é  $24.899 N$ . A fim de tornar evidentes os efeitos de segunda ordem, considera-se um valor de  $P$  pouco inferior a este ( $P = 24.000 N$ ).

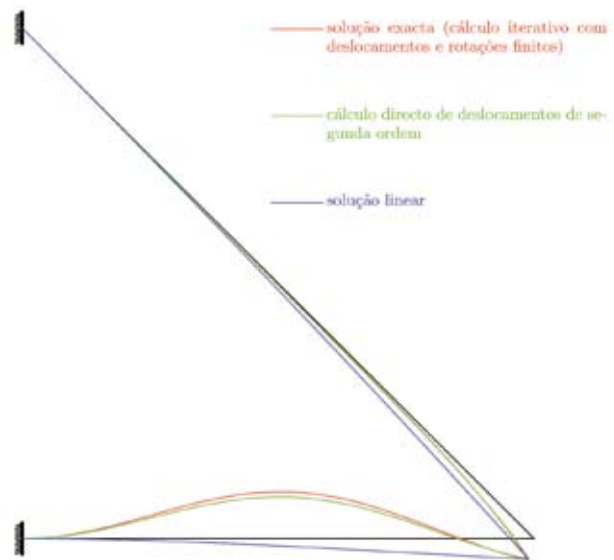
As deformações provocadas por esta carga foram calculadas através dos mesmos três métodos utilizados no primeiro exemplo (Figura 14). Na Figura 17 apresentam-se os resultados obtidos, com

um factor de amplificação dos deslocamentos de 20. Verifica-se que o método aqui analisado fornece resultados muito próximos dos exactos, os quais definem um padrão de deslocamentos na barra horizontal muito diferente do obtido através de uma análise linear. Os resultados fornecidos pelo método directo são muito bons (na barra traccionada coincidem mesmo com a solução exacta), apesar de a carga tomar um valor que equivale a cerca de 96% da carga crítica, por se tratar de rotações muito pequenas. De facto, é principalmente o valor das rotações que condiciona a exactidão do cálculo directo de deslocamentos de segunda ordem.

O último dos exemplos apresentados ilustra, tal como o segundo, a capacidade do método de cálculo directo de efeitos de segunda ordem, de captar automaticamente efeitos que só aparecem quando se considera o equilíbrio na configuração deformada da estrutura. Trata-se neste caso de um problema tridimensional, cuja topologia se indica na Figura 18. As barras são de aço e têm secção circular com diâmetros de 10 mm nas barras longitudinais e de 8 mm nas barras diagonais e transversais.

Uma vez que face a inferior da viga não é triangulada, a sua rigidez ao esforço transversal é praticamente nula, quando comparada com a das faces laterais. Em consequência disso, o centro de corte da viga está situado na sua aresta superior. Por conseguinte, as duas cargas aplicadas não provocam torção, quando o seu efeito é calculado na configuração indeformada, uma vez que estas forças não produzem momento em relação à aresta superior da viga. Esta conclusão é comprovada pela deformação calculada através de uma análise linear, como se verifica nas Figuras 19-a) e 19-b).

Porém, na configuração deformada estas forças já produzem momento torsor nas secções próximas do apoio, uma vez que as suas linhas de acção já se afastaram da linha que contém os centros



**Figura 17** Configurações deformadas da estrutura da Figura 16, obtidas com três métodos diferentes para  $P = 24.000 N$  (deslocamentos ampliados 20 vezes)

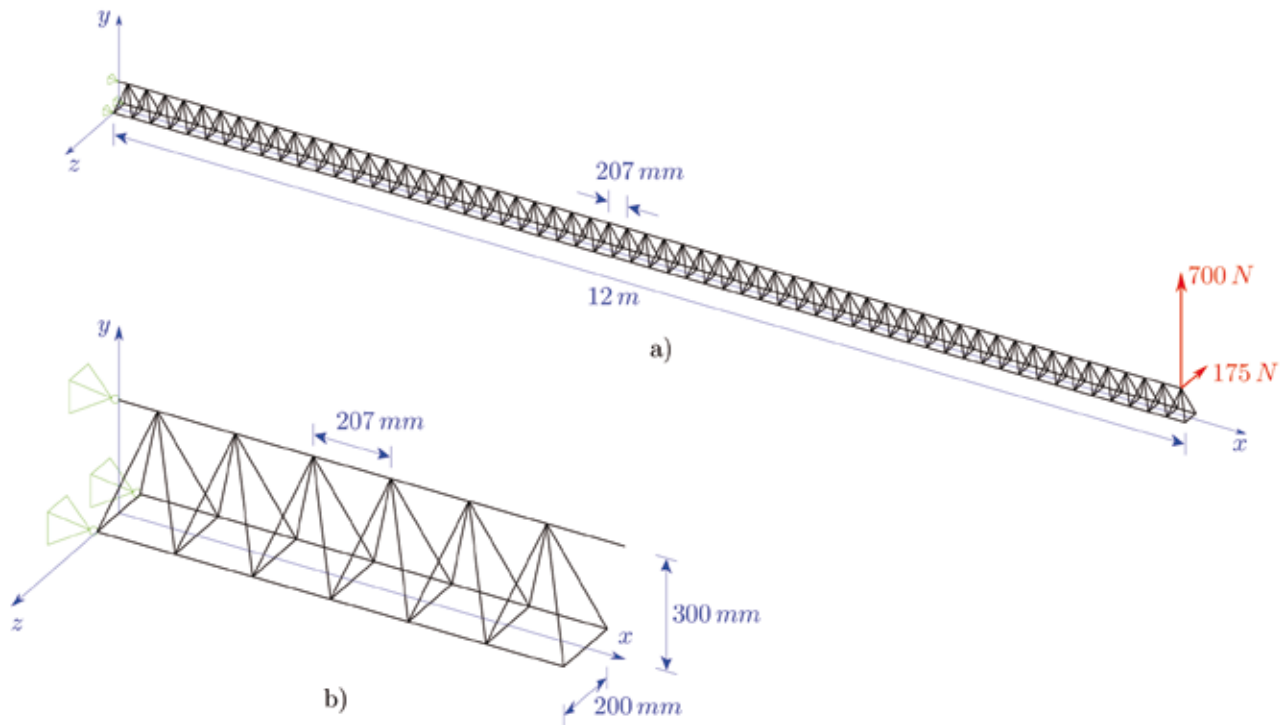


Figura 18 Viga reticulada em consola: a) vista geral; b) pormenor da zona do apoio

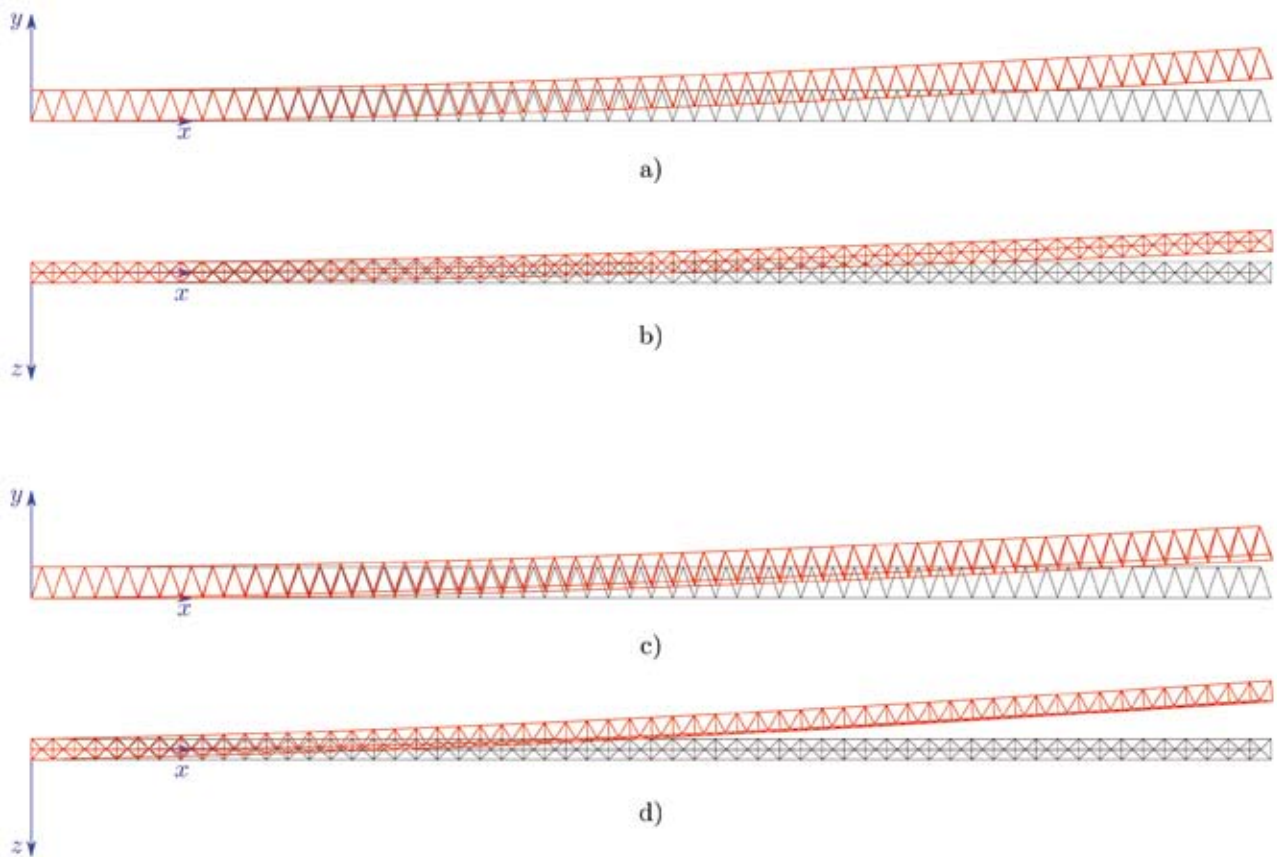


Figura 19 Deformações da viga representada na Figura 18: Análise linear: a) projecção no plano  $xy$ ; b) projecção no plano  $zx$ ; Cálculo directo de 2.ª ordem: c) projecção no plano  $xy$ ; d) projecção no plano  $zx$ .



de corte dessas secções. Este efeito está reflectido na configuração deformada calculada através do método aqui analisado, como se pode verificar nas Figuras 19-c) e 19-d). Nestas figuras é clara a rotação de torção da viga, visível a partir do primeiro quinto do seu comprimento.

A rotação da viga em torno do eixo  $x$  mantém-se constante na segunda metade do seu comprimento, o que reflecte o facto de o momento torsor ser praticamente nulo nesta zona. O método de cálculo directo de efeitos de segunda ordem capta este efeito devido ao facto de os coeficientes das matrizes de rigidez definidos pelas expressões 2 e 3 terem sido deduzidos considerando que as cargas acompanham o movimento dos nós, como se referiu anteriormente.

O cálculo correcto deste efeito tem importância prática. Por exemplo, numa grua do tipo da representada na Figura 10, sujeita às cargas indicadas e ao vento máximo em situação de serviço (75 km/h), actuando perpendicularmente ao plano da estrutura, a deformação agrava o esforço axial máximo na lança, que ocorre na barra longitudinal inferior mais próxima da torre no lado comprimido, em cerca de 12%, em relação ao valor calculado através de uma análise geometricamente linear. Este agravamento é devido fundamentalmente à torção a que a lança fica sujeita na configuração deformada. No entanto, verifica-se também que aumenta com a altura da torre, devido ao facto de a flexão desta fazer com que as cargas verticais actuantes na lança agravem a flexão horizontal deste elemento. O agravamento do momento de derrube da grua, quando considerados os efeitos de segunda ordem na mesma situação de carga, é ainda maior (cerca de 24%).

## 6 Conclusões

Através dos dois primeiros exemplos analisados no capítulo 4, para os quais foram apresentadas soluções não afectadas pela linearização dos coeficientes de rigidez (analítica no primeiro exemplo e numérica no segundo), mostrou-se que os resultados obtidos através do programa descrito se aproximam das soluções exactas, convergindo para elas quando se aumenta a subdivisão das barras. No segundo exemplo inclui-se ainda uma análise ilustrativa do efeito da não consideração da interacção entre o esforço axial e a rigidez de torção no cálculo da carga crítica global de uma estrutura. No terceiro exemplo descreve-se sucintamente a aplicação do programa de cálculo à determinação de modos de instabilidade de uma grua de grande porte.

O programa não inclui a interacção entre o momento flector e a rigidez de torção, pelo que não se adequa ao cálculo de cargas críticas de instabilidade lateral (bambeamento) de barras isoladas da estrutura reticulada. No entanto, deve notar-se que este é um efeito local e que o programa descrito se destina fundamentalmente ao cálculo da carga crítica de instabilidade global.

No capítulo 5 ilustra-se e testa-se a aplicação da matriz de rigidez usada no cálculo dos modos de instabilidade, ao cálculo não iterativo de deslocamentos de segunda ordem a partir da configuração indeformada da estrutura. Os resultados obtidos através deste método directo, em que, tal como numa análise linear, não são verificadas as condições de equilíbrio na configuração deformada,

são comparados com os fornecidos por um método iterativo. Neste, o equilíbrio entre esforços internos e forças aplicadas é verificado na configuração deformada, sem recurso à hipótese simplificativa de deslocamentos e rotações infinitesimais, pelo que pode ser considerado exacto. Mostra-se que, através do método directo, se obtêm muito bons resultados até valores da carga aplicada próximos dos correspondentes à carga crítica da estrutura, calculada segundo o método exposto no capítulo 2. Mostra-se ainda que os deslocamentos assim calculados não constituem meras amplificações dos obtidos através de uma análise linear, pois captam padrões de deformação correspondentes às condições de equilíbrio na configuração deformada. Os bons resultados obtidos pelo método directo podem ser explicados por corresponderem a uma aplicação sequencial, primeiro de um sistema de cargas que introduz os esforços axiais, seguido de outro que provoca a flexão das barras. Se o segundo não alterar a distribuição de esforços axiais, este processo consta de duas operações lineares. Estas são independentes uma da outra, pelo que podem ser reunidas numa única operação, a partir da configuração indeformada da estrutura.

## 7 Referências

- [1] V. Dias da Silva – *Mecânica e Resistência dos Materiais*, 1999 (2a edição), ISBN 972-98155-0-X.
- [2] LAPACK – Linear Algebra PACKage, versão 3.0, 2000, <http://www.netlib.org/lapack/>.
- [3] António Reis; Dinar Camotim – *Estabilidade Estrutural*, McGraw-Hill, 2000, ISBN 972-773-036-1.
- [4] V. Dias da Silva – *Introdução a Análise Não-Linear de Estruturas*, 2002, Secção de Textos do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra.