

# Otimização de cascas reforçadas assegurando fiabilidade de nível I e II

## Level I and II reliability-based optimum design of stiffened shells

Luís M. C. Simões  
József Farkas  
Károly Jármai

### Resumo

O presente trabalho centra-se na otimização para restrições determinísticas (nível I) e em alternativa com restrições de fiabilidade (nível II) de cascas cónicas metálicas com reforços soldados anelares de secção quadrada. Estes reforços podem ser colocados à mesma distância (espessura variável) ou não (espessura constante). Utilizam-se as regras do Det Norske Veritas para as restrições de encurvadura da casca e reforços. O custo inclui o material, montagem, soldadura e pintura, sendo formulado de acordo com a sequência de fabrico. A mesma metodologia é aplicada a cascas cilíndricas apoiadas na base e livres no topo submetidas a uma força axial de compressão e uma força horizontal atuando no cimo da casca. A casca é reforçada no exterior através de reforços soldados com cordões de soldadura longitudinais. Os reforços são meios perfis em I (UB). No problema de nível II consideram-se aleatórios o carregamento e as propriedades dos materiais. As restrições de fiabilidade individuais estão associadas à encurvadura da casca, instabilidade dos reforços e limite imposto ao deslocamento horizontal.

### Abstract

This work concerns the optimization both deterministic (Level I) and involving reliability constraints (Level II) of a slightly conical steel shell. The ring-stiffeners are welded square box section, equidistant (associated with variable shell thickness) and non-equidistant (associated with constant shell thickness) stiffening, external pressure, welding. Design rules of Det Norske Veritas are applied for shell and stiffener buckling constraints. The cost function includes the cost of material, assembly welding and painting and is formulated according with the fabrication sequence. The optimum design problem involves both discrete and continuous design variables. The same methodology is applied to cylindrical shell columns fixed at the bottom and free at the top subject to axial compression and horizontal force acting on the top of the column. The shell is stiffened outside with stringers welded by longitudinal fillet welds. Half rolled I section (UB) stiffeners are used to reduce welding cost. In the Level II problem randomness is considered both in loading and material properties. Individual reliability constraints related with shell buckling, stringer panel buckling and the limitation of the horizontal displacement of the column top are considered.

**Palavras-chave:** Cascas cilíndricas reforçadas / Cascas cónicas reforçadas / Otimização de estruturas / Fiabilidade / Custo

**Keywords:** Stiffened cylindrical shells / Stiffened conical shells / Structural optimization / Reliability-based design

## Luís M. C. Simões

Universidade de Coimbra  
Coimbra, Portugal  
lcsimoes@dec.uc.pt

## József Farkas

Universidade de Miskolc  
Miskolc, Hungria  
altjar@uni-miskolc.hu

## Károly Jármai

Universidade de Miskolc  
Miskolc, Hungria  
altjar@uni-miskolc.hu

## Aviso legal

As opiniões manifestadas na Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

## Legal notice

*The views expressed in the Portuguese Journal of Structural Engineering are the sole responsibility of the authors.*

SIMÕES, L. M. C. [et al.] – Otimização de cascas reforçadas assegurando fiabilidade de nível I e II. **Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas**. Ed. LNEC. Série III. n.º 1. ISSN 2183-8488 (julho 2016) 05-16.

## 1 Introdução

Klöppel e Motzel [1] realizaram trabalhos experimentais em cascas tronco-cónicas com e sem reforços anelares, propondo fórmulas simplificadas para determinar a carga crítica de encurvadura.

Rao e Reddy [2] desenvolveram um método de otimização, minimizando o peso de cascas tronco-cónicas. Foram utilizados reforços anelares e impostas restrições à encurvadura da casca e frequências angulares próprias. No livro de Ellinas *et al.* [3] são apresentados resultados experimentais e resolvidos problemas de cascas cónicas reforçadas. Spagnoli *et al.* analisaram a encurvadura e o dimensionamento de cascas cónicas com reforços retangulares submetidas a cargas axiais [4, 5, 6, 7]. Chryssanthopoulos *et al.* [8] utilizaram o método dos elementos finitos para resolver o mesmo problema. Singer *et al.* [9] descreveram detalhadamente ensaios experimentais realizados neste tipo de estruturas.

Neste trabalho escolhem-se as seguintes características da estrutura: aço, casca ligeiramente cónica, reforços quadrados de secção em caixão, afastamento regular ou não equidistante entre reforços, a ação da pressão exterior e soldadura. As regras de dimensionamento da Det Norske Veritas [10, 11] são aplicadas às restrições de encurvadura da casca e reforços. As variáveis de decisão são o número de segmentos da casca, dimensões dos reforços anelares e espessuras da casca nos segmentos com reforços equidistantes ou a espessura e a distância entre reforços.

As tensões e os deslocamentos podem ser calculados em função de valores determinísticos das cargas, geometria e comportamento material. Alguns códigos especificam probabilidades de rotura máximas num determinado período de referência. Esta probabilidade de rotura é traduzida em coeficientes de segurança e coeficientes para combinação de ações que dividem ou multiplicam, respetivamente, os valores característicos das resistências e ações, de modo a serem obtidos os valores de cálculo (nível I). Pressupõe-se que a estrutura garante a fiabilidade desejada se os estados limites não forem ultrapassados. A vantagem de utilizar um método do nível I (valores determinísticos especificados em regulamentos ou códigos) é que os estados limites são verificados para um número reduzido de combinações. Os coeficientes de segurança são muitas vezes obtidos para os membros sem se avaliar a segurança da estrutura. Este problema pode ser ultrapassado utilizando métodos de fiabilidade mais sofisticados de nível II (método dos segundos momentos de 1.ª e 2.ª ordem) e nível III (simulação de Monte-Carlo, amostragem mais representativa). Neste trabalho foi utilizado o método dos segundos momentos de 1.ª ordem [12].

Os modos de fiabilidade individuais estão associados à tensão normal provocada pela pressão exterior no segmento da casca e a encurvadura local do banzo comprimido do reforço. Por esse motivo o problema de otimização tem variáveis discretas e contínuas. Utiliza-se uma estratégia *branch and bound* para resolver os problemas de otimização com variáveis determinísticas (nível I) e aleatórias (nível II). As variáveis de decisão que conduzem a subestimativas são obtidas iterativamente ou através de otimização com variáveis contínuas. As soluções discretas pretendidas são determinadas por enumeração implícita. São comparados os custos da casca com

reforços equidistantes e variáveis.

A otimização do custo de cascas cilíndricas reforçadas depende de um conjunto de parâmetros: carga (compressão axial, flexão, pressão externa ou combinação de cargas), tipo de reforço (anelar, longitudinal, ortogonal) e perfis do reforço (plano, I, meio I, L, secção oca ou trapezoidal). Foi demonstrado que os reforços anelares são económicos para pressão exterior [13-14]. Neste estudo considera-se uma casca fixa na base e livre no topo sujeita a uma carga axial de compressão e uma força horizontal que atua no topo. Na ref. [15] é otimizada uma casca reforçada longitudinalmente no exterior sendo impostos limites ao deslocamento horizontal. Neste problema é estudada uma casca reforçada com secção constante. As restrições têm a ver com encurvadura local, encurvadura dos reforços e limites impostos aos deslocamentos horizontais. A função custo que é minimizada inclui o custo do material, transformação dos elementos de casca para geometria cilíndrica, montagem, soldadura e pintura. Para resolver os problemas de otimização com variáveis determinísticas (nível I) e aleatórias (nível II) foi adotada uma estratégia *branch and bound* em conjunto com um algoritmo de otimização baseado em entropia de informação [16]. Este algoritmo determina variáveis de decisão contínuas que constituem limites inferiores associados aos nós da árvore combinatoria, sendo obtidas as soluções discretas por enumeração implícita. Comparam-se as soluções otimizadas obtidas com base determinística e fiabilidade, sendo referida a influência dos limites impostos ao deslocamento horizontal.

## 2 Formulação do problema

### 2.1 Casca cónica

As variáveis que permitem dimensionar com reforços não equidistantes são: comprimento do segmento de casca ( $L$ ) para uma espessura especificada ( $t$ ), dimensões dos reforços anelares ( $h_r, t_r$ ). Se for igual a distância entre reforços é necessário determinar a espessura dos segmentos ( $t_s$ ) e as dimensões dos reforços ( $h_s, t_{si}$ ).

Os reforços são colocados nas extremidades, mas tem de existir uma distância mínima entre eles (representada na Figura 1 a tracejado) para permitir a inspeção das soldaduras, O número de segmentos ( $n$ ) é determinado em função da espessura da casca. Os símbolos A, G e 1 indicados na figura não vão ser utilizados diretamente neste trabalho.

### 2.2 Casca cilíndrica reforçada

A estrutura estudada é uma coluna apoiada atuada por uma carga vertical e outra horizontal. São impostos limites ao deslocamento no topo da coluna, sendo utilizados reforços longitudinais de meia secção UB. O custo da estrutura é formulado de acordo com a sequência de fabrico.

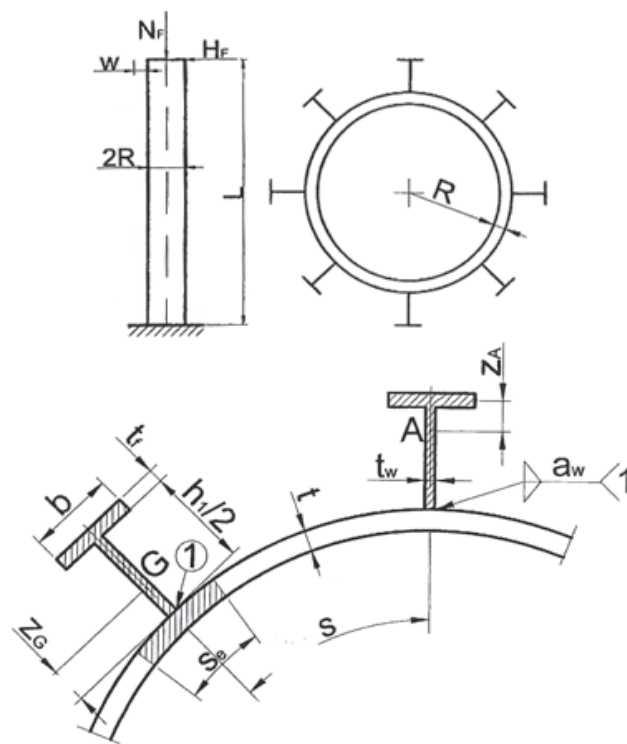


Figura 1 Casca cilíndrica reforçada submetida a uma carga vertical  $N_f$  e força horizontal  $H_f$ . Secção que inclui os reforços externos em meia secção em I

Quadro 1 Características dos perfis UB (Arbed [17])

Perfil UB	$h$ mm	$b$ mm	$t_w$ mm	$t_f$ mm	$A_s$ mm <sup>2</sup>	$I_y \times 10^{-4}$ mm
152 × 89116	152,4	88,7	4,5	7,7	2032	834
168 × 102 × 19	177,8	101,2	4,8	7,9	2426	1356
203 × 133 × 25	203,2	133,2	5,7	7,8	3187	2340
254 × 102 × 25	257,2	101,9	6,0	8,4	3204	3415
305 × 102 × 28	308,7	101,8	6,0	8,8	3588	5366
356 × 127 × 39	353,4	126,0	6,6	10,7	4977	10172
406 × 140 × 46	403,2	142,2	6,8	11,2	5864	15685
457 × 152 × 60	454,6	152,9	8,1	13,3	7623	25500
533 × 210 × 92	533,1	209,3	10,1	15,6	11740	55230
610 × 229 × 113	607,6	228,2	11,1	17,3	14390	87320
686 × 254 × 140	683,5	253,7	12,4	19,0	17840	136300
762 × 267 × 173	762,2	266,7	14,3	21,6	22040	205300
838 × 292 × 194	840,7	292,4	14,7	21,7	24680	279200
914 × 305 × 224	910,4	304,1	15,9	23,9	28560	376400

Os dados são a altura de coluna  $L$ , o raio médio da casca  $R$ , força axial de compressão  $N_p$ , força horizontal  $H_p$ , tensão de cedência no aço  $f_y$ , fatores de custo para o material, fabrico e pintura  $k_m, k_p, k_r$ . As incógnitas são a espessura da casca  $t$ , bem como a altura  $h$  e o número de reforços  $n_s$ . A distância entre eles é obtida a partir de  $n_s$ . As características dos perfis UB são reproduzidas na Quadro 1, onde se verifica que  $h = h_1 + 2t_r$ .

### 3 Restrições

#### 3.1 Casca cónica

##### 3.1.1 Restrição à encurvadura global

De acordo com as regras DNV [18], para segmentos entre dois reforços com os raios  $R_p$  e  $R_{i+1}$  a restrição relativa à encurvadura obtém-se a partir de uma casca cilíndrica com raio equivalente,

$$R_{ei} = \frac{R_{i+1} + R_i}{2 \cos \alpha}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}} \quad (1)$$

$$\tan \alpha = \frac{R_{n+1} - R_1}{L_0}, \quad R_{i+1} = L_i \tan \alpha + R_i \quad (2)$$

No problema equidistante é necessário definir o número  $n$  de segmentos entre reforços  $L_p$ ,

$$L_i = \frac{L_0}{n} \quad (3)$$

e a variável de decisão  $t_i$  está associada com a espessura equivalente,

$$t_{ei} = t_i \cos \alpha \quad (4)$$

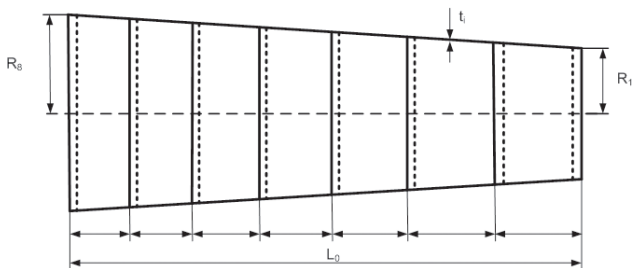


Figura 2 Casca cónica

Para reforços com espaçamentos diferentes  $t_i = t$  e  $L_i$  é uma variável de decisão. Se os espaçamentos forem idênticos determina-se a espessura  $t$  e verifica-se que a soma das variáveis  $L_i$  é igual a  $L_0$ . Eq. (1)-(2) são válidas em ambos os casos.

A tensão normal num segmento provocada pela pressão exterior tem de ser inferior à tensão crítica de encurvadura:

$$\sigma_i = \frac{\gamma_b p R_i}{t_{ei}} \leq \sigma_{cri} = \frac{f_{y1}}{\sqrt{1 + \lambda_i^4}}, \quad \lambda_i = \sqrt{\frac{f_{y1}}{\sigma_{ei}}} \quad (5)$$

$$\sigma_{ei} = \frac{C_i \pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{t_{ei}}{L_{ei}} \right)^2, \quad L_{ei} = \frac{L_i}{\cos \alpha} \quad (6)$$

e

$$C_i = 4 \sqrt{1 + 0,023214 \frac{L_{ei}^2}{R_{ei} t_{ei}}} \quad (7)$$

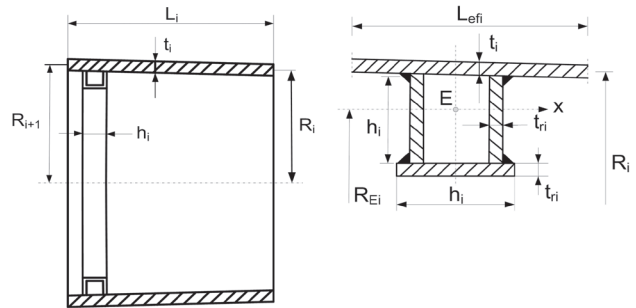


Figura 3 Segmento de casca e reforço de secção quadrada

As incógnitas  $t_i$  ou  $L_i$  são calculadas a partir da restrição de encurvadura da casca (5),  $\gamma_b$  é o coeficiente de majoração das cargas.

##### 3.1.2 Restrição à encurvadura no reforço

Para os reforços foi escolhida uma secção em caixão quadrada soldada a partir de 3 componentes. Deste modo é garantido um comportamento mais eficaz do que utilizando reforços com secção aberta (Figura 1).

De acordo com o Eurocódigo [19], a restrição à encurvadura da alma comprimida é

$$t_{ri} \geq \delta h_i, \quad 1/\delta = 42\varepsilon, \quad \varepsilon = \sqrt{235/f_y} \quad (8)$$

para  $f_y = 355$  MPa e  $1/\delta = 34$ . A Eq. (8) conduz a  $t_{ri}$ , uma vez conhecido  $h_i$ . A altura é determinada a partir da restrição à encurvadura do reforço que exige um momento mínimo de inércia em  $E$  em relação ao eixo  $x$ .  $E$  é o centro de gravidade da secção constituída pelo reforço e secção efetiva da casca (Figura 1) e  $y_{ei}$  é a distância da secção efetiva  $i$  da casca ao centro de gravidade  $E$ :

$$I_{xi} \geq I_{reqi} = \frac{\gamma_b p R_i R_{ei}^2 L_{efi}}{3E} \left[ 2 + \frac{2E y_{ei} 0,005 R_i}{R_{ei}^2 (f_{y1}/2 - \sigma_i)} \right] \quad (9)$$

e

$$I_{xi} = \frac{\delta h_i^4}{6} + 3\delta h_i^2 y_{ri}^2 \frac{L_{efi} t_i}{3\delta h_i^2 + L_{efi} t_i} + \frac{L_{efi} t_i^3}{12}, \quad y_{ri} = \frac{2h_i}{3} + \frac{t_i}{2} \quad (10)$$

$$y_{ei} = \frac{2\delta h_i^3}{3\delta h_i^2 + L_{efi} t_i} \quad (11)$$

$$L_{efi} = \min(L_i, L_{ef0i}), \quad L_{ef0i} = 1,56\sqrt{R_i t_i} \quad (12)$$

$$R_{ei} = R_i - \left( h_i + \frac{t_i}{2} + \frac{\delta h_i}{2} - y_{ei} \right) \quad (13)$$

O valor de  $h_i$  pretendido vai ser calculado a partir da Eq. (9).

## 3.2 Casca cilíndrica

### 3.2.1 Restrição à encurvadura da casca (painel curvo sem reforços)

$$\sigma_a + \sigma_b = \frac{N_f}{2R\pi t_e} + \frac{H_f L}{R^2 \pi t_e} \leq \sigma_{cr} = \frac{f_y}{\sqrt{1 + \lambda^4}} \quad (14)$$

$$\lambda^2 = \frac{f_y}{\sigma_a + \sigma_b} \left[ \frac{\sigma_a}{\sigma_{Ea}} + \frac{\sigma_b}{\sigma_{Eb}} \right]; \quad t_e = t + \frac{A_s}{2s}; \quad s = \frac{2R\pi}{n_s} \quad (15)$$

$t_e$  é a espessura equivalente.

$$\sigma_{eA} = C_a (1,5 - 50\beta) \frac{\pi^2 E}{10,92} \left( \frac{t}{s} \right)^2 \quad (16)$$

$$C_a = 4 \sqrt{1 + \left( \frac{\rho_a \xi}{4} \right)^2}; \quad Z = \frac{s^2}{Rt} 0,9539 \quad (17)$$

$$\rho_a = 0,5 \left( 1 + \frac{R}{150t} \right)^{-0,5}; \quad \xi = 0,702Z \quad (18)$$

$$\sigma_{Eb} = C_b (1,5 - 50\beta) \frac{\pi^2 E}{10,92} \left( \frac{t}{s} \right)^2 \quad (19)$$

$$C_b = 4 \sqrt{1 + \left( \frac{\rho_b \xi}{4} \right)^2}; \quad \rho_b = 0,5 \left( 1 + \frac{R}{300t} \right)^{-0,5} \quad (20)$$

O fator de distorção devido à soldadura é  $1,5 - 50\beta = 1$  quando  $t > 9 \text{ mm}$

### 3.2.2 Restrição à encurvadura do painel de reforço

$$\sigma_a + \sigma_b \leq \sigma_{cp} = \frac{f_y}{\sqrt{1 + \lambda_p^4}} \quad (21)$$

Para conhecer  $\lambda_p$  é necessário obter  $\sigma_{ep}$  que por sua vez depende de  $C_p$

$$\lambda_p^2 = \frac{f_y}{\sigma_{ep}}; \quad \sigma_{ep} = C_p \frac{\pi^2 E}{10,92} \left( \frac{t}{L} \right)^2 \quad (22)$$

$C_p$  é função de  $\xi_p$  e  $\psi_p$

$$C_p = \psi_p \sqrt{1 + \left( \frac{0,5 \xi_p}{\psi_p} \right)^2}; \quad Z_p = 0,9539 \frac{L^2}{Rt} \quad (23)$$

Por sua vez  $\xi_p$  é função de  $Z_p$  e  $\psi_p$  depende de  $\gamma_s$

$$\xi_p = 0,702Z_p; \quad \gamma_s = 10,92 \frac{l_{sef}}{st^3} \quad (24)$$

onde  $l_{sef}$  é o momento de inércia de uma secção contendo o reforço e parte da casca com largura  $S_e$  (Figura 1). Para um reforço cuja secção é metade de um  $l$

$$l_{sef} = s_e t z_G^2 + \frac{t_w}{12} \left( \frac{h_1}{2} \right)^3 + \frac{h_1 t_w}{2} \left( \frac{h_1}{4} - z_G \right)^2 + b t_f \left( \frac{h_1}{2} - z_G \right)^2 \quad (25)$$

$$z_G = \frac{h_1^2 t_w / 8 + h_1 b t_f / 2}{h_1 t_w / 2 + b t_f + s_e t} \quad (26)$$

$$h_1 = h - 2t_f \quad (27)$$

$$\psi_p = \frac{1 + \gamma_s}{1 + \frac{A_s}{2s_e t}} \quad (28)$$

Como o valor efetivo  $S_e$  (Figura 1) da casca pelas regras DNV é obtido através de um processo iterativo, foi escolhido o método simplificado do ECCS [20]:

$$s_E = 1,9t \sqrt{\frac{E}{f_y}} S_E < S \quad S_e = S_E; \quad \text{se } S_E > s \quad S_e = S \quad (29)$$

### 3.2.3 Restrição ao deslocamento horizontal

$$w_h = \frac{M L^2}{3EI_{x0}} \leq w_{allow} = \frac{L}{\phi} \quad (30)$$

$\phi$  varia entre 400 e 1000.

O cálculo exato do momento de inércia para o deslocamento horizontal utiliza o seguinte formulário (Figura 1):

A distância ao centro de gravidade da meia secção UB é

$$Z_A = \frac{h_1 t_w / 2 (h_1 / 4 + t_f / 2)}{h_1 t_w / 2 + b t_f} \quad (31)$$

Momento de inércia de meia secção UB

$$I_x = b t_f z_A^2 + \frac{t_w}{12} \left( \frac{h_1}{2} \right)^3 + \frac{h_1 t_w}{2} \left( \frac{h_1}{4} - z_A \right)^2 \quad (32)$$

Momento de inércia de uma secção de casca reforçada

$$I_{x0} = \pi R^3 t + I_x \sum_{i=1}^{n_s} \sin^2 \left( \frac{2\pi i}{n_s} \right) + \left( \frac{h_1 t_w}{2} + b t_f \right) \left( R + \frac{h_1 + t_f}{2} - z_A \right)^2 \sum_{i=1}^{n_s} \sin^2 \left( \frac{2\pi i}{n_s} \right) \quad (33)$$

## 4 Função custo

### 4.1 Casca cónica

A função custo é formulada de acordo com a sequência de fabrico.

- Modificar 3 elementos de placa em elementos casca ligeiramente cónicos ( $K_{F0}$ ).
- Soldadura de 3 elementos curvos numa casca com GMAW-C (soldadura em arco gás-metal com  $\text{CO}_2$ ) usando soldaduras de topo ( $K_{F1}$ ).
- Soldadura de  $n + 1$  reforços anelares, cada qual a partir de 3 elementos com 2 cordões de soldadura GMAW-C ( $K_{F2}$ ).

- d. Soldadura de um reforço anelar em cada segmento de casca com 2 cordões de soldadura GMAW-C ( $K_{F3}$ ).
- e. Montagem da estrutura reforçada a partir de  $n$  segmentos ( $K_{F4A}$ ),
- f. Soldadura  $n$  segmentos de casca para formar o conjunto da estrutura com  $n - 1$  soldaduras de topo anelares GMAW-C ( $K_{F4W}$ )
- g. Pintura exterior e interior da estrutura ( $K_p$ ).

O custo total inclui o custo do material, montagem soldadura e pintura,

$$K = K_M + K_{F0} + K_{F1} + K_{F2} + K_{F3} + K_{F4} + K_p \quad (34)$$

$$K_M = k_M \rho V, k_M = 1,0 \text{€}/\text{kg} \quad (35)$$

€ representa um custo de referência.

O volume do conjunto da estrutura inclui o volume dos segmentos da casca ( $V_{ij}$ ) e reforços anelares ( $V_{ri}$ )

$$V = \sum_{i=1}^n V_{ij} + \sum_{i=1}^{n+1} V_{ri} \quad (36)$$

$$K_{F0i} = k_f \Theta e^{\mu}, \quad \mu = 6,8582513 - 4,527217 t_i^{-0,5} + 0,009541996 (2R_{ei})^{0,5} \quad (37)$$

$$K_{F0} = \sum_{i=1}^n K_{F0i} \quad (38)$$

onde o fator de dificuldade de fabrico é  $\Theta = 3$  e a massa volúrnica do aço é  $\rho = 7,85 \times 10^{-6} \text{ kg}/\text{mm}^3$ ,

$$K_{F1i} = k_f \left[ \Theta \sqrt{3\rho V_{ij}} + 1,3 \times 0,152 \times 10^{-3} t_i^{1,9358} \times 3L_{ei} \right] \quad (39)$$

$$K_{F1} = \sum_{j=1}^n K_{F1j} \quad (40)$$

$$V_{ij} = 2\pi R_{ei} L_{ei} t_i \quad (41)$$

$$K_{F2i} = k_f \left[ \Theta \sqrt{3\rho V_{ij}} + 1,3 \times 0,3394 \times 10^{-3} a_w^2 \times 4\pi(R_i - h_i) \right] \quad (42)$$

e

$$V_{ri} = 4\pi t t_{ri} h_i (R_i - h_i / 2) + 2\pi t_{ri} h_i (R_i - h_i) \quad (43)$$

A dimensão do cordão de soldadura é  $a_w = 0,7 \delta h_i$ .

$$K_{F3i} = k_f \left[ \Theta \sqrt{2\rho V_{3i}} + 1,3 \times 0,3394 \times 10^{-3} a_w^2 \times 4\pi R_i \right] \quad (44)$$

$$V_{3i} = V_{ij} + V_{ri}$$

$$K_{F4} = K_{F4A} + K_{F4W}, \quad K_{F4A} = k_f \Theta \sqrt{n\rho V}, \quad K_{F4W} = \sum_{i=2}^n K_{F4Wi} \quad (45)$$

$$K_{F4Wi} = 1,3 k_f \times 0,152 \times 10^{-3} t_i^{1,9358} \times 2\pi R_i \quad (46)$$

$$K_p = K_{p1} + \sum_{i=1}^{n+1} K_{pi}, \quad K_{p1} = k_p 4\pi \frac{R_{\max} + R_1}{2} L_0 \quad (47)$$

$$K_{pi} = k_p 4\pi h_i (R_i - h_i / 2), \quad k_p = 2 \times 14,4 \times 10^{-6} \text{ €}/\text{mm}^2 \quad (48)$$

## 4.2 Casca cilíndrica

- a. Fabrico de  $n_{se} = 5$  segmentos de casca com 3 m de comprimento sem reforços. Para cada segmento da casca são necessários dois cordões de soldadura de topo axiais (GMAW-C) ( $K_{F1}$ ). Está incluído o custo de modificar cada segmento da casca na geometria cilíndrica ( $K_{F0}$ ).
- b. Soldadura de toda a casca não reforçada a partir de  $n_{se}$  elementos  $n_{se} - 1$  com soldaduras de topo circunferenciais ( $K_{F2}$ ).
- c. Soldadura de  $n_s$  reforços à casca com dois cordões de soldadura GMAW-C, totalizando  $2n_s$  ( $K_{F3}$ ).

Custo do material

$$K_M = K_{M1} n_{se} \rho V_1 + K_{M2} \rho n_s A_s L / 2 \quad (49)$$

$$V_1 = 3000 \times 2R\pi t; \quad \rho = 7,85 \times 10^{-6} \text{ kg}/\text{mm}^3; \quad k_f = 1,0 \text{€}/\text{min}; \quad K_{M1} = 1,0 \text{€}/\text{kg} \quad (50)$$

O custo de modificar os elementos da casca na forma cilíndrica é

$$K_{F0} = k_f \Theta e^{\mu}; \quad \mu = 6,8582513 - 4,527217 t^{-0,5} + 0,009541996 (2R)^{0,5} \quad (51)$$

$$K_{F1} = k_f \left[ \Theta \sqrt{k\rho V_1} + 1,3 \times 0,152 \times 10^{-3} t^{1,9358} (2 \times 3000) \right] \quad (52)$$

Em que  $\Theta$  é um fator de dificuldade que traduz a complexidade do fabrico e  $k$  o número de elementos que constituem a estrutura.

$$k = 2; \quad V_1 = 2R\pi \times 3000; \quad \Theta = 2 \quad (53)$$

$$K_{F2} = k_f \left( \Theta \sqrt{n_{se}^2 \rho V_1} + 1,3 \times 0,152 \times 10^{-3} t^{1,9358} \times 4 \times 2R\pi \right) \quad (54)$$

$$K_{F3} = k_f \left( \Theta \sqrt{(n_s + 1) \rho V_2} + 1,3 \times 0,3394 \times 10^{-3} a_w^2 2Ln_s \right) \quad (55)$$

Dimensão do cordão de soldadura  $a_w = 0,3 t_w$ ,  $a_{w\min} = 3 \text{ mm}$ .

$$V_2 = n_{se} V_1 + n_s A_s L / 2 \quad (56)$$

Custo da pintura

$$K_p = k_p (4R\pi L + n_s A_s L / 2); \quad k_p = 14,4 \times 10^{-6} \text{ €}/\text{mm}^2 \quad (57)$$

Área do reforço pintada

$$A_s / 2 = h + 2b \quad (58)$$

Custo total

$$K = K_M + n_{se} K_{F1} + n_{se} K_{F0} + K_{F2} + K_{F3} + K_p \quad (59)$$

## 5 Fiabilidade

A rotura pode ser descrita através de uma relação funcional designada função de estado limite,

$$F = \{g(x) \leq 0\} \quad (60)$$

A probabilidade de rotura é calculada a partir do integral

$$P_F = \int_{g(x) < 0} f_x(X) dx \quad (61)$$

onde  $f_x(X)$  é a função de densidade probabilística conjunta das variáveis aleatórias. Como o integral não é fácil de calcular, têm sido propostas diversas metodologias que incluem técnicas numéricas de integração, simulação de Monte Carlo e desenvolvimentos assintóticos de Laplace [21]. As técnicas de integração numérica não são eficientes para um número significativo de variáveis aleatórias  $x$ . Apesar de poderem ser utilizadas as técnicas de Monte Carlo (nível III), neste trabalho foi seguido o Método dos segundos momentos (nível II). Se a função de estado limite  $g(x)$  for linear em relação às variáveis aleatórias  $x$  que seguem a distribuição normal, a probabilidade de rotura pode ser expressa em função da margem de segurança  $M$ :

$$P_f = P\{g(x) \leq 0\} = P(M \leq 0) \quad (62)$$

que pode ser obtida a partir da variável normal padronizada

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (63)$$

em que  $\beta$  é o índice de fiabilidade que representa o quociente

$$\beta = \mu_M / \sigma_M \quad (64)$$

O índice de fiabilidade tem a interpretação geométrica da distância da linha (ou hiperplano) que constitui a fronteira entre o domínio seguro e a rotura. Neste caso, a determinação da probabilidade de rotura reduz-se a um conjunto simples de cálculos que envolvem as médias e desvios padrões das variáveis aleatórias básicas. Se as variáveis aleatórias não seguirem a distribuição normal utiliza-se a transformação de Rosenblatt para obter variáveis normais equivalentes.

Se a função de estado limite não for linear em relação às variáveis aleatórias  $x$ , tem de se linearizar a superfície de rotura representada no espaço das variáveis padronizadas  $u_i$

$$u_i = (x_i - \mu_{x_i}) / \sigma_{x_i} \quad (65)$$

Como se desconhece à partida o ponto da superfície de rotura a linearizar, utiliza-se um processo iterativo. Admitindo que a função de estado limite é diferenciável, considera-se o algoritmo

$$\alpha_i = -\partial g(\beta\alpha) / \partial u_i \left[ \sum_{j=1}^n \partial g(\beta\alpha)^2 / \partial u_j \right] \quad (66)$$

$$G(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2, \dots, \beta\alpha_n) \quad (67)$$

que termina no ponto de rotura  $u^*$  ao qual corresponde o índice de fiabilidade  $\beta$ . A probabilidade de rotura que corresponde a  $\beta$  é normalmente muito reduzida. Cada função de estado limite está associada a uma probabilidade de rotura correspondente a esse modo. Para obter a probabilidade de rotura da estrutura tem de se combinar os modos individuais. Os modos de rotura estão normalmente correlacionados quer pelas cargas quer pelas resistências, não sendo prático o cálculo exato numérico. O procedimento mais simples seria admitir uma dependência estatística entre modos perfeita (limite inferior de Cornell) ou considerá-los estatisticamente independentes (limite superior de Cornell) [22]:

$$\text{Max}_{\text{all } k} [P_r(Z_k)] \leq P_f \leq \sum_{k=1, m} P_r[Z_k \leq 0] \quad (68)$$

O intervalo entre estes limites é normalmente significativo, uma vez que não se considera nesta aproximação a correlação entre modos de rotura. O método de Ditlevsen [23] incorpora a dependência estatística entre dois modos quaisquer  $P(F_i \cap F_j)$ , o que significa que os modos  $F_i$  e  $F_j$  possam ocorrer em simultâneo e estreita consideravelmente os limites na fiabilidade da estrutura.

$$P_f \geq (F_i) + \sum_{i=2}^m \text{Max} \left\{ \left[ P(F_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(F_i \cap F_j) \right]; 0 \right\} \quad (69)$$

$$P_f \leq \sum_{i=1}^m P(F_i) - \sum_{i=2}^m \text{Max}_{j < i} P(F_i \cap F_j) \quad (70)$$

Num espaço Gaussiano são determinados os valores  $\beta_i$ ,  $\beta_j$  e o coeficiente de correlação  $\rho_{ij}$  para cada par de modos de rotura  $F_i$  e  $F_j$  de modo que se  $\rho_{ij} > 0$  ( $F_i$  e  $F_j$  correlacionados positivamente):

$$P(F_i \cap F_j) \geq \text{Max} \left\{ \Phi(-\beta_j) \Phi\left(\frac{-\beta_i - \beta_j \rho_{ij}}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}}\right); \Phi(-\beta_j) \Phi\left(\frac{-\beta_j - \beta_i \rho_{ij}}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}}\right) \right\} \quad (71)$$

$$P(F_i \cap F_j) \leq \Phi(-\beta_j) \Phi\left(\frac{-\beta_i - \beta_j \rho_{ij}}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}}\right) + \Phi(-\beta_j) \Phi\left(\frac{-\beta_j - \beta_i \rho_{ij}}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}}\right) \quad (72)$$

Outras aproximações da probabilidade de rotura da estrutura excluem o cálculo das probabilidades condicionais entre modos de rotura. Refere-se a título de exemplo o PNET (Probability Network Evaluation Technique)[24] que requer a determinação dos coeficientes de correlação entre pares de modos de rotura. O coeficiente de demarcação  $\rho_0$  define um coeficiente de correlação entre modos. Para valores superiores ao coeficiente de demarcação ( $\rho_{ij} \geq \rho_0$ ) consideram-se os modos como perfeitamente correlacionados e aqueles com correlação baixa ( $\rho_{ij} < \rho_0$ ) são independentes. Neste caso as soluções dependem significativamente do coeficiente de demarcação  $\rho_0$  estipulado.

## 6 Otimização satisfazendo níveis I e II de fiabilidade

### 6.1 Estratégia *branch and bound* para determinação do ótimo global

O problema é não-linear e as variáveis de decisão são discretas. Os métodos apropriados para resolver um problema deste tipo podem ser caracterizados como determinísticos (estratégias de enumeração, planos de corte, métodos de escavação), estocásticos (pesquisa aleatória, recosimento simulado) ou baseadas em analogias com a biologia (métodos genéticos, redes neuronais). Dado o reduzido número de variáveis discretas foi adotada uma estratégia de enumeração implícita (*branch and bound*) para obter a solução com menor custo. Os dois ingredientes são uma árvore combinatória com nós definidos de algum modo e limites inferiores



e superiores da solução ótima associados a esse nó. Deste modo é possível eliminar um conjunto significativo de soluções potenciais sem as calcular.

Considera-se terminada uma solução parcial quando for obtida uma solução com variáveis discretas ou se o dimensionamento contendo ainda algumas das variáveis contínuas tiver um custo superior a um ótimo temporário. Se uma solução parcial for terminada, isto significa que todas as soluções discretas com base nessa solução contínua foram enumeradas implicitamente. Quando o último dos nós for terminado o algoritmo finaliza, sendo o ótimo temporário a solução pretendida. Na árvore combinatória são enumerados todos os nós de forma implícita ou explícita.

### 6.1.1 Casca cónica

O processo de otimização é constituído pelos passos seguintes:

- Determinação do comprimento de cada segmento de casca para uma espessura determinada (reforços equidistantes) ou a espessura de um segmento dado o comprimento (reforços equidistantes) a partir da restrição de fiabilidade da casca;
- (Determinação da altura  $h_i$  (e  $t_{ri}$ ) dos reforços para cada segmento de casca utilizando a restrição de encurvadura do reforço e a expressão do Eurocódigo;
- Cálculo do custo da estrutura.

Para reforços equidistantes define-se  $n$  no topo da árvore combinatória, correspondendo os restantes níveis a  $t_i$  a partir do qual se determina  $h_i$  e  $t_{ri}$ . Quando se escolhe  $n$ ,  $L_i$  obtém-se a partir de (3) e os valores mínimos de  $t_i$  são obtidos a partir da restrição de fiabilidade (5) iterativamente.  $h_i$  e  $t_{ri}$  resultam das restrições (9) e (8).

Os nós da árvore combinatória estão associados ao custo da estrutura, correspondendo o segundo nível a valores discretos de  $t_i$  imediatamente acima do valor contínuo obtido. Os valores correspondentes de  $h_i$  e  $t_{ri}$  são calculados, obtendo-se uma solução discreta para  $h_i$  e  $t_{ri}$  no último nível da árvore.

No caso dos reforços não equidistantes, a espessura vai definir o nível superior da árvore combinatória. Difere do caso anterior porque a soma dos comprimentos dos segmentos tem de igualar o comprimento total da casca, não sendo nesta fase ainda conhecido  $n$ . Por esse motivo é definido  $t$  e são calculados os comprimentos máximos  $L_i$  utilizando a restrição (5).  $n$  é obtido quando a soma dos  $L_i$  não for inferior a  $L_o$ . As variáveis de decisão que correspondem aos reforços  $h_i$  e  $t_{ri}$  dependem dos valores de  $t$  e  $L_i$ . Este procedimento foi seguido duas vezes escolhendo o valor inicial de  $L_i$  em cada extremidade. Os resultados de ambas as metodologias diferiram menos de 0,5%. Em alternativa foram otimizadas as  $n - 1$  variáveis de decisão  $L_i$  utilizando o método das direções conjugadas. Foi minimizado o custo uma vez que não havia restrições dependendo de  $h_i$  e  $t_{ri}$  conduzindo a melhores resultados. A estratégia "branch and bound" descrita mantém-se válida para escolher o ótimo discreto.

### 6.1.2 Casca cilíndrica

O número de níveis da árvore combinatória é igual ao número de variáveis discretas. Utiliza-se uma regra de ramificação forte no topo

da árvore permitindo especificar o número de reforços. Cada nó é ramificado em  $n_s$  nós, cada qual associado a variáveis de decisão contínuas representando a espessura da casca  $t$  e a altura do reforço  $h$ . Este procedimento requer a utilização de valores contínuos próximos das características das secções em UB ( $A_s, b, t_p, t_w$ ) que são obtidas em função de  $h$ . Por sua vez a altura  $h$  também tem um valor contínuo determinado utilizando as alturas dos diversos perfis UB. Contudo, é necessário que estas propriedades geométricas subestimem as características geométricas verdadeiras de modo que a solução obtida, utilizando as propriedades reais dos perfis, deem resultados superiores aos encontrados utilizando as aproximações contínuas. No segundo nível da árvore os ramos correspondem aos diferentes perfis UB. Deste modo é calculada a espessura contínua mínima de casca necessária. A solução mínima discreta corresponde a solução ótima temporária. Cada nó está associado a uma subestimativa até ao 2.º nível. Cada nó cujo valor seja inferior ou igual à solução ótima temporária mantém-se ativo. Caso contrário consideram-se terminados. Todos os nós da árvore combinatória têm de ser analisados até terminarem. A estratégia de ramificação adotada foi escolher sempre o nó associado ao menor custo.

Consideram-se três níveis na árvore combinatória. Estipula-se no topo da árvore o número de reforços, correspondendo os dois níveis restantes aos perfis UB e à espessura  $t$  da coluna em caixão de secção quadrada.  $B_o$  será obtido uma vez que sejam conhecidas as variáveis restantes.

Os mesmos níveis foram adotados na placa celular apoiada, sendo determinados  $t_1$  e  $t_2$  no terceiro nível. Foi seguida uma regra forte para obter os nós do nível inferior, ou seja: cada nó pode ser ramificado em  $n_s$  nós, cada qual associado ao número de reforços na direção  $x$ . Este procedimento exige a utilização de valores contínuos próximos das características dos perfis UB ( $b_1, t_p, t_w$ ). Estas aproximações que dependem da altura são determinadas a partir dos dados correspondentes a todos os perfis. Do mesmo modo obtém-se uma expressão contínua para  $h$ . É necessário ter em atenção que as propriedades geométricas assim calculadas sejam subestimativas convexas das propriedades reais, de modo a que a solução obtida utilizando os valores reais dos perfis UB seja mais dispendiosa do que as obtidas utilizando as aproximações contínuas.

## 6.2 Subestimativa convexa: otimização com variáveis de decisão contínuas

Uma subestimativa consiste em resolver o problema de otimização admitindo variáveis contínuas em lugar das discretas. Para minimizar o custo e satisfazer as restrições define-se um problema com objetivos múltiplos. Todos os objetivos são normalizados atribuindo-se o peso a cada um associado à entropia de informação. Se for especificado um custo de referência  $K_o$ , a redução deste objetivo consiste em

$$g_1(t, h) = K(t, h) / K_o - 1 \leq 0 \quad (73)$$

Outros dois objetivos resultam da restrição à encurvadura global e dos painéis de reforço:

$$g_2(t, h) = (\sigma_a + \sigma_b) / \sigma_{cp} - 1 \leq 0 \quad (74)$$



$$g_3(t, h) = (\sigma_a + \sigma_b) / \sigma_{crp} - 1 \leq 0 \quad (75)$$

É necessário acrescentar no caso da casca cilíndrica um objetivo relacionado com a redução do deslocamento horizontal máximo:

$$g_4(t, h) = w_h / w_{allow} - 1 \leq 0 \quad (76)$$

A otimização de Pareto melhora o dimensionamento, sendo obtidas soluções através da otimização da função escalar convexa [25]:

$$F(t, h) = \frac{1}{\rho} \cdot \ln \left[ \sum_{j=1}^3 \exp(g_j(t, h)) \right] \quad (77)$$

Esta função constitui uma aproximação convexa dos objetivos. Como alguns destes objetivos não têm uma expressão algébrica explícita, a estratégia adotada consiste em resolver uma sequência de modelos aproximados. Utilizam-se os dois primeiros termos das séries de Taylor, daí resultando o problema de otimização:

$$\text{Min} F(t, h) = \frac{1}{\rho} \cdot \ln \left[ \sum_{j=1}^3 \exp \left( g_{0j}(t, h) + \frac{\partial g_{0j}(t, h)}{\partial t} dt + \frac{\partial g_{0j}(t, h)}{\partial h} dh \right) \right] \quad (78)$$

Este problema possui uma solução analítica em termos das modificações das variáveis de decisão  $dt$  e  $dh$ . A resolução para um valor numérico particular de  $g_{0j}$  constitui uma iteração de (77). Impõem-se limites para as alterações nos valores das variáveis de decisão de modo a garantir a precisão das aproximações. Neste exemplo e como é diminuto o número de variáveis de decisão é possível determinar a solução analítica dos problemas de otimização (78). No decurso das iterações aumenta-se o parâmetro de controlo  $\rho$  de modo a melhorar a qualidade da aproximação.

## 7 Resultados numéricos e discussão

### 7.1 Casca cónica

Considera-se a casca cónica atuada por uma pressão exterior e com reforços anelares de secção quadrada em caixão. A otimização minimiza o custo total, garantindo a fiabilidade de nível I (problema determinístico) e de nível II sendo comparados os resultados, designadamente custo e variáveis de dimensionamento. As dimensões dos reforços em cada segmento são obtidas com base na fiabilidade do reforço à encurvadura neste último problema e nas expressões determinísticas para o cálculo baseado em valores regulamentares (nível I). Comprimento total da casca  $L = 15000$ , raios laterais  $R_{min} = R_1 = 1850$  e  $R_{max} = R_{n+1} = 2850$  mm, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , módulo de elasticidade  $E = 2,1 \times 10^5$  MPa. De acordo com o dimensionamento tradicional por estados limites (nível I) consideram-se os valores de cálculo da tensão  $f_y = 355$  MPa e da pressão exterior  $p = 0,75$  MPa. Considera-se o coeficiente de majoração das cargas  $\gamma_b = 1,5$  para as restrições de encurvadura da carga e do reforço. Para o problema de nível II consideram-se variáveis aleatórias a tensão média  $\mu_{fy} = 440$  MPa e um coeficiente de variação de 0,10 e a média da pressão exterior  $\mu_p = 0,3765$  MPa e um coeficiente de variação de 0,20. Em ambos os casos foi adotada a distribuição normal. Apesar de a aleatoriedade do módulo de elasticidade poder desempenhar um papel significativo, não foi aqui

considerado. A probabilidade de rotura calculada está associada a estados limites que correspondem a tensões de encurvadura na estrutura e a encurvadura dos painéis de reforço. Em primeira análise, as restrições são limites impostos à probabilidade de rotura devida à encurvadura da casca e dos painéis de reforço.

A espessura (para reforços equidistantes) ou o comprimento de cada segmento da casca (reforços não equidistantes) são calculados de modo a garantir a fiabilidade da casca à encurvadura. No caso dos reforços equidistantes utilizam-se valores de  $n$  entre 4 e 8. Foram obtidas soluções com diferentes coeficientes de variação do carregamento e valores de  $p_r$ . Em cada caso a probabilidade de rotura foi definida para a equação de estado limite definida quando as tensões normais devidas à pressão exterior em cada segmento de casca se aproximam da carga crítica de encurvadura. A equação de estado limite relacionada com o dimensionamento dos reforços anelares está altamente correlacionada com a encurvadura global da casca e a probabilidade de rotura mais alta representa ambos os modos. Os custos totais são representados na Quadro 2.

Estes resultados são idênticos aos encontrados quando a casca está submetida a cargas determinísticas. Justificam-se devido à predominância das restrições de encurvadura global. Os dimensionamentos que correspondem a estas soluções são representados na Quadro 3.

**Quadro 2** Custo  $\times 10^3$ . Os valores ótimos são indicados a negrito

	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$
Cov = 0,15 $p_r = 10^{-3}$		73,5	73,0	<b>72,7</b>	73,6
Cov = 0,20 $p_r = 10^{-4}$	80,0	<b>78,4</b>	79,2	79,1	
Cov = 0,25 $p_r = 10^{-5}$	85,4	84,9	<b>84,2</b>	84,5	

**Quadro 3** Dimensões principais (em mm) dos ótimos

$n = 7$ Custo = 72,7 $10^3$			$n = 5$ Custo = 78,4 $10^3$			$n = 6$ Custo = 84,2 $10^3$		
$t_i$	$h_i$	$tr_i$	$t_i$	$h_i$	$tr_i$	$t_i$	$h_i$	$tr_i$
15	110	4	19	119	4	19	131	4
16	118	4	20	133	4	20	143	5
16	128	4	21	146	5	21	156	5
17	136	4	22	160	5	22	169	5
17	146	5	23	174	6	22	184	6
18	155	5	24	188	6	23	198	6
18	164	5				24	211	7
19	173	6						

Soluções ótimas para reforços não equidistantes estão representadas na Quadro 4.

**Quadro 4** Custo  $\times 10^3$ . Os valores ótimos são indicados a negrito

	t = 16	t = 17	t = 18	t = 19
Cov = 0,15 $p_f = 10^{-3}$	74,2	73,8	<b>72,8</b>	75,0
Cov = 0,20 $p_f = 10^{-4}$	80,1	<b>78,2</b>	<b>78,2</b>	80,5
Cov = 0,25 $p_f = 10^{-5}$	103,2	<b>86,6</b>	90,0	90,9

Os dimensionamentos que correspondem a estas soluções são representados na Quadro 5.

**Quadro 5** Dimensões principais (em mm) dos elementos correspondentes às soluções ótimas

t = 18, n = 6 Custo 72,8 10 <sup>3</sup>			t = 18, n = 7 Custo 78,2 10 <sup>3</sup>			t = 18, n = 7 Custo 78,2 10 <sup>3</sup>			t = 17 n = 9 Custo 86,6 10 <sup>3</sup>		
L <sub>i</sub>	h <sub>i</sub>	tr <sub>i</sub>	L <sub>i</sub>	h <sub>i</sub>	tr <sub>i</sub>	L <sub>i</sub>	h <sub>i</sub>	tr <sub>i</sub>	L <sub>i</sub>	h <sub>i</sub>	tr <sub>i</sub>
2433	108	4	2628	120	4	2415	120	4	2055	134	4
3012	118	4	2458	133	4	2190	133	4	1896	147	5
2686	131	4	2246	145	5	2022	144	5	1772	160	5
2452	142	5	2085	157	5	1892	155	5	1670	174	6
2277	154	5	1958	169	5	1787	167	5	1588	189	6
2140	164	5	1856	181	6	1700	178	6	1518	205	7
			1769	194	6	1627	190	6	1456	224	7
						1042	203	6	1404	248	8
									1315	279	9

Para reforços equidistantes não há conclusões relativas ao número ótimo de reforços ou como o dimensionamento é alterado alterando os requisitos de fiabilidade. Há um elevado número de soluções discretas próximas, sendo a mais económica selecionada através da enumeração implícita.

Quando os reforços são não equidistantes, a conclusão geral indica a necessidade de mais reforços quando aumenta o cov do carregamento ou se reduz  $p_f$ . Há soluções ótimas muito próximas (menos do que 1% de diferença) para um cov do carregamento igual a 0,2 e  $p_f = 10^{-4}$ . Neste caso o quociente entre o custo do material e o custo de fabrico é menor porque são necessários mais reforços para garantir a estabilidade de uma casca mais fina.

As soluções com reforços equidistantes são normalmente mais económicas que as obtidas com reforços não equidistantes para valores superiores da carga e menor  $p_f$  por necessitarem de um menor número de reforços. É possível reduzir o número de reforços na carga com reforços não equidistantes quando se reduz a carga e aumenta  $p_f$ . Os custos não diferem muito para os dois tipos de reforço ainda que os dimensionamentos sejam substancialmente diferentes.

## 7.2 Casca cilíndrica

Dados numéricos:

$$N_F = 34\,000 \text{ kN}, f_y = 355 \text{ MPa}, R = 1850 \text{ mm}, L = 15 \text{ m}.$$

$$M = H_F L; H_F = 0,1 N_F$$

De acordo com o dimensionamento tradicional por estados limites com cargas determinísticas (nível I) considera-se a tensão  $f_y = 355 \text{ MPa}$  e a carga vertical  $N_F = 22,67 \text{ MN}$ . O coeficiente de majoração da carga vertical e horizontal para os estados limites últimos relacionados com a encurvadura da casca e do painel de reforço é 1,5. Não se considera este coeficiente de majoração no estado limite de utilização decorrente do limite imposto ao deslocamento horizontal. Para o problema nível II consideram-se variáveis aleatórias a tensão média  $\mu_y = 440 \text{ MPa}$  e um coeficiente de variação 0,10 e a média do carregamento vertical  $\mu_{NF} = 20 \text{ MN}$  e um coeficiente de variação 0,20. Em ambos os casos foi adotada a distribuição normal. Apesar de a aleatoriedade do módulo de elasticidade poder desempenhar um papel significativo, não foi aqui considerado. Em primeira análise, as restrições são limites impostos à probabilidade de rotura devida à encurvadura da casca e dos painéis de reforço e de o deslocamento horizontal máximo poder ser ultrapassado.

Admite-se a probabilidade de rotura máxima  $p_f \leq 1,0E-4$  ( $\beta$  maior que 3,72). Como se verifica que as encurvaduras da casca e do reforço são altamente correlacionadas, a probabilidade de rotura mais elevada representa ambos os modos. A correlação entre estes modos e o deslocamento horizontal é mais fraca (0,6) o que significa que os limites de 2.ª ordem de  $p_f$  são superiores em cerca de 6% à probabilidade de rotura do modo mais elevado. Os resultados da otimização são indicados nas Quadro 6.

**Quadro 6** Resultados da otimização da casca com reforços soldados

$\phi$	Cargas determinísticas (Nível I)					Método dos segundos momentos (Nível II)				
	UB	$n_s$	t mm	$p_f$	Custo €	UB	$n_s$	t mm	$p_f$	Custo €
500	305	19	20	3,5E-5	53729	168	19	20	1,0E-4	51887
600	457	18	18	1,2E-4	54450	457	16	19	8,5E-5	55019
700	610	19	14	1,8E-4	56501	686	14	16	9,2E-5	58111
800	914	10	16	1,5E-4	60347	838	13	15	7,8E-5	61480
900	914	14	13	2,0E-4	63616	914	14	14	8,2E-5	65599
1000	914	17	12	2,0E-4	68569	914	17	13	8,8E-5	70548

A comparação entre soluções ótimas utilizando a fiabilidade e soluções determinísticas demonstra que as primeiras são normalmente menos económicas quando os deslocamentos horizontais são menores, mas são mais seguras. Para L/1000, L/900 e L/700 obtêm-se soluções 3% mais caras mas com o

dobro da segurança; L/800: 5% mais caras mas com o dobro da segurança; L/600: 1% mais caras mas 40% mais segura. L/500: 3% mais barata, mas menos segura. Na Quadro 7 verifica-se que o aumento de segurança é em larga medida devido ao aumento da espessura. Os dimensionamentos com base probabilística utilizam menores reforços se não for ativo o estado limite associado aos deslocamentos horizontais máximos (L/500 e L/600).

**Quadro 7** Otimização com restrições de fiabilidade para diferentes  $P_f$

$\phi$	pr 1,0E-3					py < 1,0E-5				
	UB	$n_s$	t mm	Custo €	Dif cust. %	UB	$n_s$	t mm	Custo €	Dif cust. %
500	152	17	19	48574	-6,4	168	19	22	56021	8,0
600	457	19	16	51152	-7,0	457	15	21	58392	6,1
700	610	17	14	54054	-7,0	914	6	21	61273	5,4
800	914	9	16	58036	-5,6	914	11	17	64667	5,2
900	914	13	13	61305	-6,5	838	19	13	69615	6,1
1000	914	16	12	66259	-2,8	914	18	14	74842	6,0

**Quadro 8** Otimização com restrições de fiabilidade para diferentes coeficientes de variação das cargas

$\phi$	Coeficientes de variação = 0,15					Coeficientes de variação = 0,25				
	UB	$n_s$	t mm	Custo €	Dif cust. %	UB	$n_s$	t mm	Custo €	Dif cust. %
500	152	19	19	49194	-5,2	152	18	20	55063	6,1
600	406	19	17	50895	-7,5	533	18	17	57579	4,7
700	838	5	19	53396	-8,1	838	10	18	61455	5,8
800	762	12	15	57094	-7,1	914	13	15	65279	6,1
900	914	11	15	60658	-7,5	914	17	13	70548	6,1
1000	914	15	12	63948	-9,3	914	19	14	77153	9,3

As soluções determinísticas coincidem com as soluções com base probabilística quando se especifica a probabilidade de rotura máxima indicada na 5.ª coluna da Quadro 6.

As Quadros 7 e 8 apresentam soluções ótimas com base probabilística quando se modifica  $p_f$  e o coeficiente de variação do carregamento. Quando se reduzem os deslocamentos máximos permitidos (L/1000 e L/900) aumenta o número e dimensão dos reforços.

## 8 Conclusões

O presente trabalho centra-se na otimização para restrições determinísticas e em alternativa com restrições de fiabilidade de cascas cónicas metálicas com reforços soldados anelares de secção quadrada. Estes reforços podem ser colocados à mesma distância (espessura variável) ou não (espessura constante). A mesma metodologia é aplicada a cascas cilíndricas apoiadas na base e livres no topo submetidas a uma força axial de compressão e uma força horizontal atuando no cimo da casca. A casca é reforçada no exterior através de reforços soldados com cordões de soldadura longitudinais. Os reforços são meios perfis em I (UB). A função custo que é minimizada inclui o custo do material, transformação dos elementos de casca para geometria cilíndrica, montagem, soldadura e pintura. Para resolver os problemas de otimização com variáveis determinísticas (nível I) e aleatórias (nível II) foi adotada uma estratégia *branch and bound* em conjunto com um algoritmo de otimização baseado em entropia de informação. Este algoritmo determina variáveis de decisão contínuas que constituem limites inferiores associados aos nós da árvore combinatória, sendo obtidas as soluções discretas por enumeração implícita. Foram comparadas na discussão anterior as soluções otimizadas obtidas com base determinística e fiabilidade. Nas cascas tronco-cónicas os custos não diferem muito para os dois tipos de reforço ainda que os dimensionamentos sejam substancialmente diferentes. Nas cascas cilíndricas reforçadas é referida a influência dos limites impostos ao deslocamento horizontal. Como seria de esperar, as soluções determinísticas coincidem com as obtidas com restrições de fiabilidade se for dominante um dos estados limites, mas podem divergir se a probabilidade de rotura da estrutura depender de vários estados limites com uma correlação pequena e associados a probabilidades de rotura da mesma ordem de grandeza.

## Referências

- [1] Klöppel; Motzel, E. – Traglastversuche an stählernen, unversteiften und ringversteiften Kegelstumpfschalen. Teil 1. *Versuchsbericht. Stahlbau* 45 (10), 289-301, 1976.
- [2] Rao, S.S.; Reddy, E.S. – Optimum design of stiffened conical shells with natural frequency constraints. *Computers & Structures* 14 (1-2), 103-110, 1981.
- [3] Ellinas, C.P.; Supple, W.J.; Walker, A.C. – *Buckling of offshore structures*. London, etc. Granada Publ., 1984.
- [4] Spagnoli, A. – *Buckling behaviour and design of stiffened conical shells under axial compression*. PhD thesis, University of London, London, 1997.
- [5] Spagnoli, A.; Chryssanthopoulos, M.K. – Buckling design of stringer-stiffened conical shells in compression. *J. Struct. Eng. ASCE* 125 (1), 40-48, 1999a.
- [6] Spagnoli, A.; Chryssanthopoulos, M.K. – Elastic buckling and postbuckling behaviour of widely-stiffened conical shells under axial compression. *Eng. Struct.* 21 (9), 845-855.
- [7] Spagnoli, A. – Different buckling modes in axially stiffened conical shells. *Eng. Struct.* 23 (8), 957-965, 2001

- [8] Chryssanthopoulos, M.K.; Poggi, C.; Spagnoli, A. – Buckling design of conical shells based on validated numerical models. *Thin-walled Struct.* 31 (1-3), 257-270, 1998.
- [9] Singer, J.; Arboz, J.; Weller, T. – *Buckling experiments: experimental methods in buckling of thin-walled structures*. Vol.2. Shells, built-up structures, composites and additional topics. New York, Wiley & Sons, 2002.
- [10] Det Norske Veritas (DNV) – *Buckling strength analysis*. Classification Notes No.30.1. Høvik, Norway, 1995.
- [11] Det Norske Veritas (DNV) – *Buckling strength of shells. Recommended Practice* DNV-RP-C202. Høvik, Norway, 2002.
- [12] Hasofer, A.M.; Lind, N.C. – Exact and invariant second moment code format, *J.Eng Mech Div.* ASCE, 100(1), 111-121.
- [13] Farkas, J.; Jármai, K. – *Economic design of metal structures*, Rotterdam, Millpress, 2003.
- [14] Farkas, J.; Jármai, K.; Snyman, J.A.; Gondos, Gy – Minimum cost design of ring-stiffened welded steel cylindrical shells subject to external pressure. *Proc. 3rd European Conf. Steel Structures*, Coimbra, 2002, Universidade de Coimbra, 2002. 513- 522.
- [15] Farkas, J.; Jármai, K. – Optimum design of a welded stringer-stiffened steel cylindrical shell subject to axial compression and bending, *57th Annual Assembly of International Institute of Welding*, July 12-16, 2004, Osaka, Japan, IIW-Doo. XV-1167-04, XV-WG9-26-04, 24 p.
- [16] Simões, L.M.C.; Farkas, J.; Jármai, K. – Reliability-based optimum design of a welded stringer-stiffened steel cylindrical shell subject to axial compression and bending, *Struct. and Multidisc. Optim.*, 31 (2), 147-155, 2006.
- [17] *ProfilArbed Sales program*, Structural shapes. Arcelor Long Commercial, 2001.
- [18] Farkas, J. – Thickness design of axially compressed unstiffened cylindrical shells with circumferential welds. *Welding in the World*, 46 (2002) No. 11/12. 26-29.
- [19] *Eurocode 3 – Design of steel structures. Part 1-1: General structural rules*. Brussels, CEN, 2002.
- [20] European Convention of Constructional Steelwork (ECCS) *Recommendations for Construction, Buckling of steel shells*. No. 56. Brussels, 1988.
- [21] Bjerager, P. – Probability integration by directional simulation, *J. Eng. Mech.* ASCE, 114 (8), 1288-1302, 1988.
- [22] Cornell, C. – Bounds on the reliability of structural systems, *J. Struct Div.*, ASCE, 93(1), 171-200, 1967.
- [23] Ditlevsen, O. – Narrow reliability bounds for structural systems, *J. Struct. Mech.*, 7 (4), 453-472, 1979.
- [24] Zhao, Y.G.; Ang, A.H.S. – *Methods for System Reliability in Reliability and Optimization of Structural Systems*. Maes M. &Huuse L. Ed., Taylor and Francis, 2004.
- [25] Simões, L.M.C.; Templeman, A.B. – Entropy-based synthesis of pretensioned cable net structures, *Engineering Optimization*, 15, 121-140, 1989.