Análise de estabilidade de vigas pultrudidas de GFRP: soluções analíticas para a encurvadura lateral

Stability analysis of pultruded GFRP beams: analytical solutions for lateral-torsional buckling

Mário Sá Nuno Silvestre Augusto Gomes João Correia

Resumo

A utilização de perfis poliméricos reforçados com fibra de vidro (GFRP, Glass Fibre Reinforced Polymer) em aplicações estruturais tem vindo a crescer continuadamente. No entanto, permanecem algumas reservas inerentes à utilização destes elementos estruturais devido, entre outros aspetos, à sua suscetibilidade a fenómenos de instabilidade. Neste artigo apresentam-se os resultados de um estudo numérico, analítico e experimental sobre o comportamento de encurvadura lateral de vigas de GFRP. É desenvolvida e implementada numericamente uma formulação que permite analisar qualquer tipo de instabilidade em vigas com secção em I ou H solicitadas à flexão em 3- e 4-pontos. Particulariza-se para o caso da encurvadura lateral (flexão--torção) e obtém-se uma expressão simplificada que permite estimar cargas críticas considerando a influência das condições de apoio e contraventamento. Os resultados numéricos da formulação e os resultados analíticos da expressão simplificada são validados por comparação com valores experimentais e valores numéricos existentes na literatura, mostrando uma boa concordância.

Abstract

The use of glass fibre reinforced polymer (GFRP) pultruded profiles in structural applications has been increasing consistently. However, there is still some reluctance about the use of such elements due to several aspects, among which their susceptibility to instability phenomena. This paper presents the results of a numerical, analytical and experimental study on the behaviour of lateral-torsional buckling of GFRP beams. A formulation is developed and implemented numerically, which allows analysing any type of instability on I or H-section beams under 3- and 4-point bending. The lateral buckling (flexural-torsion) case is particularized and a simple expression that allows estimating critical loads considering the influence of the conditions of support and lateral bracing is derived. The numerical results of the formulation and analytical results obtained with the simplified expression are validated by comparison with experimental and numerical values from the literature, with a good agreement having been obtained.

Palavras-chave: Perfis pultrudidos de fibra de vidro (GFRP) / Vigas I de parede fina aberta / Encurvadura lateral por flexão-torção / Rayleigh-Ritz / / Princípio da estacionariedade da energia potencial (PEEP)

Keywords:

ds: Glass fibre reinforced pultruded profiles (GFRP) / Thin-walled open I-beams / Lateral-torsional buckling / Rayleigh-Ritz / Stationarity principle of potential energy (PEEP)

Mário Sá

Investigador ICIST, Instituto Superior Técnico Lisboa, Portugal sa@civil.ist.utl.pt

Nuno Silvestre

Professor Associado ICIST, Instituto Superior Técnico Lisboa, Portugal nunos@civil.ist.utl.pt

Augusto Gomes

Professor Associado ICIST, Instituto Superior Técnico Lisboa, Portugal augusto@civil.ist.utl.pt

João Correia

Professor Associado ICIST, Instituto Superior Técnico Lisboa, Portugal jcorreia@civil.ist.utl.pt

Aviso legal

As opiniões manifestadas na Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

Legal notice

The views expressed in the Portuguese Journal of Structural Engineering are the sole responsibility of the authors.

SÁ, M. [et al.] – Análise de estabilidade de vigas pultrudidas de GFRP: soluções analíticas para a encurvadura lateral. **Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas**. Ed. LNEC. Série III. n.º 1. ISSN 2183-8488 (julho 2016) 17-30.

1 Introdução

Os perfis de polímero reforcado com fibra de vidro (GFRP, Glass Fibre Reinforced Polymer) apresentam um forte potencial como materiais de construção, devido a um conjunto de vantagens que incluem a leveza, a rapidez de instalação, a resistência, a durabilidade em ambientes agressivos, as boas propriedades de isolamento e a transparência eletromagnética [1]. Atualmente, existem diversos exemplos de aplicação de perfis de GFRP com funções estruturais na construção de edifícios e pontes (novas e na reabilitação de tabuleiros antigos) [2-4]. Porém, existem algumas condicionantes nas aplicações estruturais de perfis GFRP associadas essencialmente à sua reduzida rigidez, nomeadamente (i) uma elevada deformabilidade (Estado Limite de Serviço normalmente condicionante) e (ii) uma elevada suscetibilidade aos fenómenos de instabilidade [5-7]. Devido à reduzida relação rigidez / resistência dos perfis de GFRP, estes são mais suscetíveis à encurvadura elástica que perfis similares em aço [6-8], nos quais a instabilidade pode ocorrer em regime elasto-plástico. Por isso, é fundamental efetuar análises lineares de estabilidade de perfis de GFRP sempre que estes estejam submetidos a tensões normais (compressão e/ou flexão), identificando-se os modos de encurvadura e cargas de bifurcação associadas. Comparativamente aos perfis de aço (material isotrópico), a presença de fibras de vidro na direção longitudinal dos perfis induz um comportamento ortotrópico das suas paredes, o que torna mais complexa a determinação da carga crítica de encurvadura e do modo correspondente [9]. No caso de perfis de GFRP submetidos a flexão uniforme (de agora em diante, designados simplesmente por "vigas"), existem três tipos de encurvadura: (i) local, (ii) lateral-distorcional e (iii) lateral (flexão-torção) [8-13]. Em vigas submetidas a flexão em torno do eixo de maior inércia, existe um deslocamento vertical (deslocamento V, Figura 1) na fase de pré-encurvadura. Se a viga for pouco contraventada ou longa, existe um limite para o qual a viga instabiliza lateralmente num modo de flexão-torção (designado de "bambeamento"), o qual resulta de uma combinação entre o deslocamento lateral W de flexão em torno do eixo de menor inércia e a rotação ϕ de torção da secção transversal do perfil em torno do seu eixo, como se observa na Figura 1.

Para além da complexidade associada à natureza ortotrópica das paredes dos perfis de GFRP, as secções de parede fina aberta também possuem uma reduzida rigidez de torcão e de empenamento em relação a outros tipos de secção (e.q., tubular), que faz aumentar a sua suscetibilidade a fenómenos que envolvam torção. Por outro lado, a elevada relação entre o módulo de elasticidade longitudinal E_{i} e o módulo de distorção $G_{i\tau}$ faz com que exista uma contribuição não desprezável da deformação por corte em vigas de GFRP. Todos estes fatores contribuem para a dificuldade em determinar rigorosamente o valor da carga crítica de encurvadura lateral em vigas de GFRP. Com base na adaptação da teoria da estabilidade de vigas constituídas por materiais isotrópicos (*e.q.*, vigas em aço) [14,15] para vigas constituídas por materiais ortotrópicos, diversos estudos propuseram expressões analíticas para estimar a carga de encurvadura lateral de vigas de GFRP [16-19]. No entanto, para ter em conta todos os fatores de complexidade anteriormente referidos, as expressões propostas resultaram bastante complexas.

Outras mais simples são também menos rigorosas pois dependeram do grau de aproximação.



Figura 1 Configuração deformada no modo de instabilidade lateral por flexão-torção de um perfil com secção de parede fina aberta em I [14]

No presente artigo, apresenta-se uma formulação geral que permite analisar a instabilidade (local, distorcional e global) de perfis de GFRP submetidos a quaisquer condições de carregamento. Para estabelecer as equações de equilíbrio que regem o fenómeno de instabilidade, utiliza-se o critério estático do equilíbrio adjacente, formulado em termos do Princípio da Estacionariedade da Energia Potencial (PEEP). Em particular, aplica-se a formulação ao caso de um carregamento que introduza flexão em torno do eixo de maior inércia em fase de pré-encurvadura e que conduz à instabilidade lateral da viga. Para a discretização do sistema contínuo (transformação num sistema discreto), recorre-se ao método de Rayleigh-Ritz com funções trigonométricas na direção longitudinal para cada um dos graus de liberdade de flexão-torção, W – deslocamento de flexão no plano de menor inércia, e ϕ – rotação de torção (*cf.* Figura 1). A formulação é implementada computacionalmente para um conjunto de condições de fronteira, contraventamento, localização de carga na secção e localização do(s) ponto(s) de aplicação de carga no eixo:

- 1. Condições de fronteira nos apoios de extremidade (plano X-Z);
- Condições de contraventamento lateral na secção de meio vão (plano X-Z);
- Localização do ponto de aplicação da carga na secção (banzo superior, centro de corte e banzo inferior);
- Localização do(s) ponto(s) de aplicação de carga ao longo do eixo da viga (flexão em 3-pontos; 3PB e flexão em 4-pontos; 4PB).

Posteriormente, desenvolvem-se expressões analíticas simples para o caso da carga localizada no centro de corte. Validam-se os resultados por comparação com valores obtidos por outros autores, nomeadamente resultados de índole analítica e experimental [16,17]. A formulação proposta, que visa fundamentalmente uma melhor interpretação do comportamento à rotura de vigas ensaiadas à flexão, baseia-se em princípios energéticos estudados por Ma e Hughes [9] e, posteriormente, por outros investigadores [16-19].

2 Formulação geral

2.1 Representação do campo de deslocamentos

O estudo analítico que se efetua neste artigo tem por objetivo estimar cargas críticas de instabilidade P_{cr} por flexão-torção em vigas pultrudidas de GFRP, com secção de parede fina aberta em I e fletidas em torno do eixo de maior inércia. No entanto, a formulação que se apresenta de seguida é válida para qualquer tipo de fenómeno de encurvadura. A secção transversal bissimétrica com geometria em I é discretizada num conjunto de três elementos de placa fina (laminados), solicitados nos seus próprios planos, conforme se ilustra na Figura 2. A simbologia utilizada está representada igualmente na Figura 2, onde os índices inferiores FS, W e FI dizem respeito ao banzo superior, alma e banzo inferior, respetivamente. No que diz respeito às dimensões, b é a largura de uma parede (alma ou banzo) e *t* é a sua espessura. Por outro lado, no que diz respeito ao sistema de eixos, Z, Y e X são as coordenadas locais na direção horizontal, vertical e axial, respetivamente. As correspondentes componentes de deslocamento são W, V e U.

O campo de deslocamentos em cada uma das paredes laminadas é caracterizado pelo vetor deslocamento, $\underline{U} = \{U, V, W\}$, o qual pode ser escrito para cada uma das paredes na forma seguinte:

Banzo superior FS (plano X-Z) Alma W (plano X-Y) Banzo inferior FI (plano X-Z)

$$\underline{U}^{FS} = \begin{cases} U^{FS} = \begin{bmatrix} U^{FS}_{(x,z)} \end{bmatrix}^{f} + u^{FS}_{(x,z)} \\ W^{FS} = \begin{bmatrix} W^{FS}_{(x,z)} \end{bmatrix}^{f} + u^{FS}_{(x,z)} \\ W^{W} = \begin{bmatrix} W^{W}_{(x,y)} \end{bmatrix}^{f} \end{bmatrix}^{f} \underline{U}^{FI} = \begin{cases} U^{FI}_{FI} = \begin{bmatrix} U^{FI}_{(x,z)} \end{bmatrix}^{f} + u^{FI}_{(x,z)} \\ W^{FI} = V^{FI}_{(x,z)} \\ W^{FI} = \begin{bmatrix} W^{FI}_{(x,z)} \end{bmatrix}^{f} + u^{FI}_{(x,z)} \end{cases}$$
(1)

onde U^f , V^f e W^f são designados por deslocamentos de préencurvadura, associados à trajetória de equilíbrio fundamental (estados planos de tensão – EPT), *e u*, *v* e *w* representam os deslocamentos ("acréscimos") num estado de equilíbrio adjacente (encurvadura). Como se considera a secção submetida a flexão em torno do eixo de maior inércia, tem-se $\left[V_{(x,z)}^{F_2}\right]^f = 0$, $\left[W_{(x,y)}^W\right]^f = 0$, $\left[V_{(x,z)}^{F_1}\right]^f = 0$. Ao longo da trajetória de equilíbrio fundamental, as tensões, deformações e deslocamentos variam proporcionalmente ao parâmetro de carga $\lambda = P$.



Figura 2 Definição de geometria, eixos coordenados e campo de deslocamentos da viga com secção em l

2.2 Relações cinemáticas

As deformações generalizadas a definir, em relação à superfície média das placas, são de dois tipos: (i) deformações de membrana (extensões $\varepsilon_{x'}$, ε_y e ε_z e distorções $\gamma_{xy} = 2 \cdot \varepsilon_{xy}$ e $\gamma_{xz} = 2 \cdot \varepsilon_{xz}$) e (ii) deformações de flexão/torção (curvaturas de flexão $\chi_{x'}$, χ_y e χ_z e de torção χ_{xy} e χ_{xz}). No que respeita às relações cinemáticas, estas deformações generalizadas podem ser escritas na forma geral:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (U_{i,j} + U_{j,i} + U_{k,j} \cdot U_{k,j}), \quad i, j, k, l = x, y, z$$
(2)

onde $\{U_{x^{i}}, U_{y^{j}}, U_{z}\} = \{U, V, W\}$ e o índice k é mudo (convenção de EINSTEIN) e os índices i e j são livres.

Uma vez definido o tensor das deformações, ε_{u} , para EPT em ambos os tipos de placa (banzos e alma), as relações $\varepsilon - U$ são expressas no âmbito das hipóteses da teoria de Von Karman. Para além das hipóteses fundamentais adotadas da teoria clássica formulada por LOVE, a teoria de VON KARMAN admite: (i) pequenas deformações e (ii) rotações moderadas. Sobre tais premissas, as deformações generalizadas (membrana) para o problema de estabilidade são expressas pelos termos não lineares das derivadas parciais dos deslocamentos. Com base na teoria de Von KARMAN, apenas se consideram os gradientes da deformação W_{y} e W_{y} para a alma no plano X-Y e V, e V, para os banzos no plano X-Z' (deslocamentos perpendiculares ao plano médio das placas). Nessa medida, são retidos em (2) os respetivos termos não lineares quadráticos $W_{x}^{2} \in W_{y}^{2}$ na alma, e $V_{x}^{2} \in V_{z}^{2}$ nos banzos. No presente problema de instabilidade, os gradientes de deformação V, e U, podem exibir uma contribuição considerável devido às rotações no plano da placa [9], especialmente no caso dos banzos; ao passo que os termos U_{i} e V,, em particular as suas formas quadráticas, são muito menos relevantes do que os restantes termos e, como tal, são desprezados. Nesse sentido, as relações cinemáticas vêm assim definidas para as três placas laminadas:

Deformações de membrana

Deformações de flexão/torção

$$\underline{\varepsilon}^{F5} = \begin{cases} \varepsilon_{x} \\ \varepsilon_{y} \\ \gamma_{xz} \end{cases}^{F5} = \begin{cases} U_{x}^{F5} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(W_{x}^{F5} \right)^{2} + \left(V_{x}^{F5} \right)^{2} \right] \\ W_{x}^{F5} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(U_{x}^{F5} \right)^{2} + \left(V_{x}^{F5} \right)^{2} \right] \\ W_{x}^{F5} + U_{x}^{F5} + V_{x}^{F5} \cdot V_{x}^{F5} \end{cases} \left\{ \underline{\chi}^{F5} = \begin{cases} \chi_{x} \\ \chi_{z} \\ \chi_{xz} \end{cases}^{F5} = \begin{cases} V_{xx}^{F5} \\ 2 \cdot V_{xx}^{F5} \\ 2 \cdot V_{xx}^{F5} \end{cases} \right\} (3.1)$$

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{w} = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{x} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{y} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} \end{cases}^{w} = \begin{cases} U_{x}^{w} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(V_{x}^{w} \right)^{2} + \left(W_{x}^{w} \right)^{2} \right] \\ V_{y}^{w} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(U_{y}^{w} \right)^{2} + \left(W_{y}^{w} \right)^{2} \right] \\ V_{y}^{w} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(U_{y}^{w} \right)^{2} + \left(W_{y}^{w} \right)^{2} \right] \end{cases} \underbrace{\boldsymbol{\chi}}^{w} = \begin{cases} \boldsymbol{\chi}_{x} \\ \boldsymbol{\chi}_{y} \\ \boldsymbol{\chi}_{yy} \end{cases}^{w} = \begin{cases} \boldsymbol{W}_{xx}^{w} \\ \boldsymbol{\chi}_{yy} \\ 2 \cdot W_{xy}^{w} \end{cases}$$
(3.2)

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{FI} = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{x} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{z} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xz} \end{cases}^{FI} = \begin{cases} U_{x}^{FI} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(W_{x}^{FI} \right)^{2} + \left(V_{x}^{FI} \right)^{2} \right] \\ W_{z}^{FI} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(U_{z}^{FI} \right)^{2} + \left(V_{z}^{FI} \right)^{2} \right] \\ W_{x}^{FI} + U_{z}^{FI} + V_{x}^{FI} \cdot V_{z}^{FI} \end{cases} \underbrace{\mathbf{\chi}_{z}}_{z} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi}_{x} \\ \boldsymbol{\chi}_{z} \\ \boldsymbol{\chi}_{xz} \end{bmatrix}^{FI} = \begin{cases} \boldsymbol{\chi}_{x} \\ \boldsymbol{\chi}_{xz} \\ \boldsymbol{\chi}_{x} \end{bmatrix}^{FI} = \begin{cases} \boldsymbol{\chi}_{x} \end{bmatrix}^{FI} = \begin{cases} \boldsymbol{\chi}_{x} \\ \boldsymbol{\chi}_{x} \end{bmatrix}^{FI} = \begin{cases} \boldsymbol{\chi}_{x} \\ \boldsymbol{\chi}_{x} \end{bmatrix}^{FI} = \begin{cases} \boldsymbol{\chi}_{x} \end{bmatrix}^{FI} =$$

Refira-se que as vírgulas precedentes aos índices das componentes do campo de deslocamentos designam derivadas parciais, *i.e.*, tem-se por exemplo $U_{,x}^{w} \equiv \partial U^{w}/\partial x$, $W_{,y}^{w} \equiv \partial W^{w}/\partial x \partial y$.

2.3 Relações constitutivas

As tensões generalizadas associadas às deformações generalizadas referidas anteriormente são respetivamente: (i) os esforços de membrana (esforços normais N_x , $N_y \in N_z$ e esforços tangenciais $N_x e$ N_x) e (ii) os esforços de flexão/torção (momentos fletores M_x , $M_y e$ M_z e momentos torsores $M_{xy} e M_{xz}$), em relação à superfície média das placas. Para EPT, as relações constitutivas utilizadas correspondem às descritas na *Teoria Clássica dos Compósitos Laminados* – CLT [20], sendo dadas na forma matricial:

$$\begin{cases}
\underline{N} \\
\underline{-} \\
\underline{M}
\end{cases} = \begin{bmatrix}
A_{ij} & | & B_{ij} \\
------ \\
B_{ij} & | & D_{ij}
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}
\underline{\varepsilon} \\
-\\
\underline{\chi}
\end{bmatrix}$$
(4)

onde $A_{ij'} D_{ij} e B_{ij}$ representam, respetivamente, as matrizes de rigidez de membrana, de flexão e de ligação entre a rigidez de membrana e a rigidez de flexão. Porém, uma grande parte das secções dos elementos pultrudidos de GFRP é tratada, aproximadamente, como sendo uma estrutura laminada simétrica, cujas paredes são simétricas em relação ao seu plano médio [20]. Nesta situação, são nulas (i) as componentes tangenciais da matriz A_{ij} ($A_{16} = A_{26} = 0$), (ii) as componentes de torção da matriz D_{ij} ($D_{16} = D_{26} = 0$) e (iii) todas as componentes da matriz B_{ij} . Numa placa genérica (no plano X-Y) com espessura uniforme t, cada componente não nula das matrizes $A_{ij} e D_{ij}$ tem a forma:

Matriz de rigidez de membrana

$$A_{ii} = t \cdot \overline{Q}_{ii} \qquad \qquad D_{ii} = t^3 / 12 \cdot \overline{Q}_{ii} \qquad (5.1)$$

Matriz de rigidez de flexão

em que a matriz, \overline{Q}_{ij} , contém as constantes elásticas e pode ser escrita na forma:

$$\overline{Q}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1 - \mathbf{v}_{xy} \cdot \mathbf{v}_{yx}} & \frac{\mathbf{v}_{yx} \cdot E_x}{1 - \mathbf{v}_{xy} \cdot \mathbf{v}_{yx}} & \mathbf{0} \\ & \frac{E_x}{1 - \mathbf{v}_{xy} \cdot \mathbf{v}_{yx}} & \mathbf{0} \\ & & G_{xy} \end{bmatrix}$$
(5.2)

onde $E_x e E_y$ são os módulos de elasticidade do laminado nas direções x e y, G_{xy} é o módulo de distorção e v_{xy} e v_{yx} são os coeficientes de Poisson. As propriedades mecânicas de painéis laminados podem ser obtidas de forma independente, quer por via experimental, quer por intermédio de teorias analíticas de previsão usando modelos micro e/ou macromecânicos [17,18]. Uma vez conhecidas as constantes elásticas para os dois tipos de placa do perfil (banzos e alma), *e.g.*, através da realização de uma campanha experimental de caracterização do material, as propriedades de rigidez (matrizes $A_{ij} \in D_{ij}$) de ambos os laminados podem ser definidas "simplificadamente" de forma análoga às representadas pela teoria elástica das placas ortotrópicas, tal como estipulado em [4] através do conceito de propriedades de rigidez equivalentes (efetivas) dos laminados. Nesse sentido, as relações constitutivas podem ser definidas por:

Esforços de membrana

Esforços de flexão/torção

$$\underline{N}^{FS} = \{N_x\}^{FS} = [A_{11}]^{FS} \cdot \{\varepsilon_x\}^{FS} \underline{M}^{FS} = \{M_x\}^{FS} = \begin{bmatrix}D_{11} & 0\\0 & D_{66}\end{bmatrix}^{FS} \cdot \{\chi_x\}^{FS}$$
(6.1)

$$\underline{N}^{w} = \begin{cases} N_{x} \\ N_{y} \\ N_{yy} \end{cases}^{w} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}^{w} \cdot \begin{cases} \varepsilon_{x} \\ \varepsilon_{y} \\ \gamma_{xy} \end{cases}^{w} \begin{bmatrix} M_{x} \\ M_{y} \\ M_{yy} \end{bmatrix}^{w} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}^{w} \cdot \begin{pmatrix} \chi_{x} \\ \chi_{y} \\ \chi_{xy} \end{bmatrix}^{w}$$
(6.2)

$$\underline{N}^{FI} = \{N_x\}^{FI} = [A_{11}]^{FI} \cdot \{\varepsilon_x\}^{FI} \underline{M}^{FI} = \begin{cases} M_x \\ M_{xz} \end{cases}^{FI} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{66} \end{bmatrix}^{FI} \cdot \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_{xz} \end{bmatrix}^{FI}$$
(6.3)

Como os banzos fletem unicamente em torno do seu eixo de menor inércia, são considerados nulos os esforços de membrana $N_z = N_{xz} = 0$ e o momento fletor $M_z = 0$.

2.4 Esforços de membrana (pré-encurvadura)

Os esforços de membrana instalados na viga são linearmente dependentes das forças aplicadas (proporcionais ao parâmetro de carga, $\lambda \equiv P$). No presente estudo, estes foram obtidos com base nos princípios da elasticidade, sendo expressos pelos produtos das tensões existentes em cada parede da secção pela espessura da parede em causa. Os EPT a que estão submetidas as paredes foram definidos para duas situações distintas de carregamento transversal do perfil, nomeadamente: (i) uma carga concentrada a meio vão (*3PB* – "flexão em 3 pontos") e (ii) duas cargas concentradas a um e dois terços de vão (*4PB* – "flexão em 4 pontos"). Considera-se que a viga está sempre simplesmente apoiada no plano de flexão primária (plano *X*-*Y*) e que o momento de inércia de flexão em torno do eixo *Z* vale:

$$I_{zz} = \frac{h^3 \cdot t_w}{12} + \frac{b \cdot t_F \cdot h^2}{2}$$
(7)

onde se considera a secção reduzida à sua linha média e se despreza a inércia dos banzos em torno da sua linha média. Na Figura 3 são ilustrados os diagramas de tensões normais e tangenciais associadas à flexão da secção em torno do eixo Z. De seguida, resumem-se as expressões dos esforços de membrana, função do parâmetro de carga, para as três paredes da secção: banzos superior, inferior e alma.



Figura 3 Distribuição das tensões normais (à esq.) e tangenciais (à dir.) da secção I

Os banzos encontram-se submetidos a EPT uniaxiais definidos, respetivamente, pelas tensões normais máximas de compressão e de tração, uniformes na secção e independentes de *Z* (*cf*. Figura 3) mas variáveis ao longo do eixo da viga com *X*, *i.e.*, segundo a direção longitudinal das paredes. Neste caso, despreza-se a contribuição das tensões tangenciais nos banzos da secção, as quais têm uma variação linear em cada metade do banzo mas assumem uma resultante nula em todo o banzo. De acordo com o sistema de eixos adotado, os banzos têm os seguintes esforços de membrana na direção longitudinal $X(N_z^{FS} = N_{xz}^{FS} = N_{xz}^{FI} = N_{xz}^{FI} = 0)$:

Flexão 3PB
Flexão 4PB

$$V_{x}^{FS} = \begin{cases} -\rho \cdot \left(\frac{h \cdot t_{FS}}{4 \cdot l_{xx}}\right) \cdot x ; 0 \le x \le \frac{l}{2} \\ -\rho \cdot \left(\frac{h \cdot t_{FS}}{4 \cdot l_{xx}}\right) \cdot (l - x) ; \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases} \begin{cases} -\rho \cdot \left(\frac{h \cdot t_{FS}}{4 \cdot l_{xx}}\right) \cdot x ; 0 \le x \le \frac{l}{3} \\ -\rho \cdot \left(\frac{h \cdot t_{FS}}{12 \cdot l_{xx}}\right) \cdot (l - x) ; \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases} \end{cases} (8.1)$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \rho \cdot \left(\frac{h \cdot t_{FS}}{4 \cdot l_{xx}}\right) \cdot (l - x) ; \frac{l}{2} \le x \le l \\ \rho \cdot \left(\frac{h \cdot t_{FS}}{4 \cdot l_{xx}}\right) \cdot (l - x) ; \frac{2l}{3} \le x \le l \end{array} \right\}$$

$$N_{x}^{f_{i}} = \begin{cases} P \cdot \left(\frac{h \cdot t_{f_{i}}}{4 \cdot l_{z_{i}}}\right) \cdot x ; 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ P \cdot \left(\frac{h \cdot t_{f_{i}}}{4 \cdot l_{z_{i}}}\right) \cdot (L - x) ; \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases} \begin{cases} P \cdot \left(\frac{h \cdot t_{f_{i}}}{12 \cdot l_{z_{i}}}\right) \cdot x ; 0 \le x \le \frac{L}{3} \\ P \cdot \left(\frac{h \cdot t_{f_{i}}}{12 \cdot l_{z_{i}}}\right) \cdot L ; \frac{L}{3} \le x \le \frac{2L}{3} \end{cases} (8.2) \\ P \cdot \left(\frac{h \cdot t_{f_{i}}}{4 \cdot l_{z_{i}}}\right) \cdot (L - x) ; \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

Assumindo que as tensões normais na direção longitudinal se distribuem linearmente na altura da secção, h, (Figura 3) com valor nulo ao nível de $G \approx S$, vem:

Flexão 3PB

$$N_{x}^{W} = \begin{cases}
P \cdot \left(\frac{t_{W}}{2 \cdot l_{z}}\right) \cdot x \cdot y ; 0 \le x \le \frac{L}{2} \\
P \cdot \left(\frac{t_{W}}{2 \cdot l_{z}}\right) \cdot (L - x) \cdot y ; \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases} \begin{cases}
P \cdot \left(\frac{t_{W}}{2 \cdot l_{z}}\right) \cdot x \cdot y ; 0 \le x \le \frac{L}{3} \\
P \cdot \left(\frac{t_{W}}{6 \cdot l_{z}}\right) \cdot L \cdot y ; \frac{L}{3} \le x \le \frac{2L}{3} \\
P \cdot \left(\frac{t_{W}}{2 \cdot l_{z}}\right) \cdot (L - x) \cdot y ; \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases} \tag{9}$$

Com o objetivo de contabilizar a influência da localização do(s) ponto(s) de aplicação da(s) carga(s) transversal(is), y^{ρ} , relativamente ao centro de corte S, o esforço de membrana normal na direção transversal, $N_{y'}^{W}$, é representado pela expressão simplificada abaixo indicada:

Flexão 3PB

$$N_{y}^{W} = P \cdot \left(\frac{1}{h}\right) \cdot \left(y + y^{p}\right)$$

$$N_{y}^{W} = \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{1}{h}\right) \cdot \left(y + y^{p}\right)$$

$$-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2} \quad em \quad x = \frac{L}{2}$$
(10)
(10)

Segundo esta abordagem pressupõe-se que a alma do perfil absorve a totalidade da força transversal sob o ponto de aplicação desta. Realça-se que as últimas expressões (10), decorrentes do corte instalado na viga (nas secções de aplicação das cargas), incorrem numa singularidade da resolução do integral que envolve este termo e as funções de forma utilizadas. Para ultrapassar esta situação, definiu-se a integração em *X* para um intervalo relativamente pequeno, aproximadamente, entre 40% e 60% do(s) comprimento(s) do(s) tramo(s) à esquerda e à direita do(s) ponto(s) interior(es) de carga. Não obstante, refere-se que os valores obtidos utilizando este artifício revelaram uma elevada precisão (diferenças *ca.* 2%) quando comparados com os obtidos da aplicação da função de DIRAC para vãos correntes, compreendidos entre 1200 e 4000 mm.

Por fim, o esforço de membrana tangencial na alma, $N_{xy'}^w$ foi avaliado recorrendo à teoria do corte em vigas fletidas, estabelecendo o equilíbrio com $N_{x'}^w$. Note-se que se admite que a distribuição das tensões tangenciais é nula nos banzos da secção $\left(N_{xy}^{FS} = N_{xy}^{FI} = 0\right)$ e, por isso, não existe continuidade do fluxo de corte no nó de ligação banzo-alma. Os esforços de membrana tangenciais na alma, $N_{xy'}^w$ são aproximados pelas representações que se seguem, respetivamente, para flexão *3PB* e *4PB*:

$$N_{xy}^{W} = \begin{cases} \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{t_{W}}{2 \cdot l_{zz}}\right) \cdot \left(\left(\frac{h}{2}\right)^{2} - y^{2}\right) + \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{b \cdot h \cdot t_{F}}{2 \cdot l_{zz}}\right); 0 \le x \le \frac{L}{2} \land -\frac{h}{2} \le y \le \frac{h}{2} \end{cases}$$
(11.1)
$$N_{xy}^{W} = \begin{cases} \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{t_{W}}{2 \cdot l_{zz}}\right) \cdot \left(\left(\frac{h}{2}\right)^{2} - y^{2}\right) - \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{b \cdot h \cdot t_{F}}{2 \cdot l_{zz}}\right); \frac{L}{2} \le x \le L \land -\frac{h}{2} \le y \le \frac{h}{2} \end{cases}$$
(11.1)
$$N_{xy}^{W} = \begin{cases} \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{t_{W}}{2 \cdot l_{zz}}\right) \cdot \left(\left(\frac{h}{2}\right)^{2} - y^{2}\right) + \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{b \cdot h \cdot t_{F}}{2 \cdot l_{zz}}\right); 0 \le x \le \frac{L}{3} \land -\frac{h}{2} \le y \le \frac{h}{2} \end{cases}$$
(11.2)
$$0 \qquad \qquad ; \frac{L}{3} \le y \le \frac{2L}{3} \qquad (11.2)$$

$$-\frac{P}{2} \cdot \left(\frac{t_{W}}{2 \cdot l_{zz}}\right) \cdot \left(\left(\frac{h}{2}\right)^{2} - y^{2}\right) - \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{b \cdot h \cdot t_{F}}{2 \cdot l_{zz}}\right); \frac{2L}{3} \le x \le L \land -\frac{h}{2} \le y \le \frac{h}{2} \end{cases}$$

2.5 Energia potencial total

A energia potencial total do sistema estrutural, Π , é constituída pela soma da energia de deformação elástica, U, com o potencial das forças exteriores, V^{ext} . De acordo com a teoria geral da estabilidade linear, o desenvolvimento da variação da energia potencial em série, entre uma configuração de equilíbrio e uma adjacente, é controlado na vizinhança da trajetória fundamental pelo termo de 2.ª ordem, sendo condição suficiente, numa análise linear de estabilidade, reter apenas os termos quadráticos da energia potencial. No caso particular das paredes em análise, o termo linear que não figura (PEEP na trajetória fundamental) na forma escrita que segue:

$$\Delta \Pi [u, v, w, \lambda] \equiv \Pi_2 [u, v, w, \lambda] = U_2$$
⁽¹²⁾

contém a contribuição das forças exteriores para a energia potencial. Nessa medida, o potencial exterior V^{ext} em estado linear de préencurvadura (produto das cargas aplicadas pelos correspondentes deslocamentos) pode ser ignorado na análise da encurvadura lateral da viga. Por conseguinte, para vigas em I, a expressão do termo quadrático da energia de deformação total pode ser decomposta em três parcelas, correspondentes às energias de deformação elástica de cada uma das três paredes que constituem a secção transversal, resultando na seguinte forma

$$U_2 = U_2^{FS} + U_2^{W} + U_2^{FI} \tag{13}$$

A energia de deformação elástica de cada parede é constituída por duas parcelas, associadas, respetivamente, às deformações de membrana, $U_{_{N'}}$ e às deformações de flexão/torção, $U_{_{M'}}$. Tem-se, então, de acordo com a teoria de placas:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{V} (\sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}) dV = \frac{1}{2} \iiint_{V} (\sigma_{x} \cdot \varepsilon_{x} + \sigma_{y} \cdot \varepsilon_{y} + \sigma_{z} \cdot \varepsilon_{z}) dV \Leftrightarrow (=U_{N} + U_{M})$$
(14)

que, para cada parede (individualmente), vem representada por:

$$U^{FS} = \frac{1}{2} \iint_{S} \left[\left(N_{x}^{FS} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{x}^{FS} \right) + \left(M_{x}^{FS} \cdot \boldsymbol{\chi}_{x}^{FS} + M_{xz}^{FS} \cdot \boldsymbol{\chi}_{xz}^{FS} \right) \right] dxdz$$
(15.1)

$$U^{w} = \frac{1}{2} \iint_{S} \left[\left(N_{x}^{w} \cdot \varepsilon_{x}^{w} + N_{y}^{w} \cdot \varepsilon_{y}^{w} + N_{xy}^{w} \cdot \gamma_{xy}^{w} \right) + \left(M_{x}^{w} \cdot \chi_{x}^{w} + M_{y}^{w} \cdot \chi_{y}^{w} + M_{xy}^{w} \cdot \chi_{xy}^{w} \right) \right] dxdy$$
(15.2)

$$U^{FI} = \frac{1}{2} \iint_{S} \left[\left(N_x^{FI} \cdot \varepsilon_x^{FI} \right) + \left(M_x^{FI} \cdot \chi_x^{FI} + M_{xz}^{FI} \cdot \chi_{xz}^{FI} \right) \right] dx dz$$
(15.3)

onde *S* presente no integral duplo representa a área do plano médio da parede em causa. Os banzos foram considerados como placas laminadas submetidas à flexão no plano de menor inércia, em que as suas secções transversais rodam em torno dos seus próprios eixos e fletem lateralmente. Por aproximação dos banzos a elementos de viga, desprezaram-se segundo a direção transversal (Z), os esforços de membrana normais e tangenciais $N_z = N_{xz} = 0$ e os momentos fletores $M_z = 0$. Introduzindo as relações constitutivas (6) nas expressões (15) anteriores, obtém-se:

$$U^{FS} = \begin{cases} U_{N}^{FS} = \frac{1}{2} \iint_{S} \left[A_{11}^{FS} \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{x}^{FS} \right)^{2} \right] dx dz \\ + \\ U_{M}^{FS} = \frac{1}{2} \iint_{S} \left[D_{11}^{FS} \cdot \left(\boldsymbol{\chi}_{x}^{FS} \right)^{2} + D_{66}^{FS} \cdot \left(\boldsymbol{\chi}_{xz}^{FS} \right)^{2} \right] dx dz \end{cases}$$
(16.1)

$$U^{W} = \begin{cases} U_{N}^{W} = \frac{1}{2} \iint_{S} \left[A_{11}^{W} \cdot (\varepsilon_{x}^{W})^{2} + A_{22}^{W} \cdot (\varepsilon_{y}^{W})^{2} + 2 \cdot A_{12}^{W} \cdot (\varepsilon_{y}^{W}) + A_{66}^{W} \cdot (\gamma_{yy}^{W})^{2} \right] dxdy \\ + & (16.2) \\ U_{M}^{H} = \frac{1}{2} \iint_{S} \left[D_{11}^{W} \cdot (\chi_{x}^{W})^{2} + D_{22}^{W} \cdot (\chi_{y}^{W})^{2} + 2 \cdot D_{12}^{W} \cdot (\chi_{x}^{W}) \cdot (\chi_{y}^{W}) + D_{66}^{W} \cdot (\chi_{yy}^{W})^{2} \right] dxdy \end{cases}$$

$$U^{FI} = \begin{cases} U_{N}^{FI} = \frac{1}{2} \iint_{S} \left[A_{11}^{FI} \cdot (\varepsilon_{x}^{FI})^{2} \right] dxdz \\ + & (16.3) \\ U_{M}^{FI} = \frac{1}{2} \iint_{S} \left[D_{11}^{FI} \cdot (\chi_{x}^{FI})^{2} + D_{66}^{FI} \cdot (\chi_{x2}^{FI})^{2} \right] dxdz \end{cases}$$

De forma a ser possível exprimir a energia de deformação elástica das paredes (16) em termos dos deslocamentos, é necessário introduzir o campo de deslocamentos atrás decomposto (1) nas relações cinemáticas definidas para as três paredes (3). Conclui-se que o termo quadrático combinado das duas parcelas (membrana e flexão/torção) da energia de deformação é dado, para cada uma das paredes, por:

$$U_{2}^{FS} = \begin{cases} U_{N2}^{FS} = \frac{1}{2} \iint_{S} \left[A_{11}^{FS} \cdot \left(u_{x}^{FS} \right)^{2} + \left(N_{x}^{FS} \right)^{f} \cdot \left(\left(v_{x}^{FS} \right)^{2} + \left(w_{x}^{FS} \right)^{2} \right) \right] dx dz \\ + & (17.1) \end{cases}$$

$$U_{M2}^{FS} = \frac{1}{2} \iint_{S} \left[D_{11}^{FS} \cdot \left(v_{xx}^{FS} \right)^{2} + 4 \cdot D_{66}^{FS} \cdot \left(v_{xz}^{FS} \right)^{2} \right] dx dz \qquad (17.1)$$

$$U_{2}^{W} = \begin{cases} U_{N2}^{W} = \frac{1}{2} \iint_{S} \left[(N_{x}^{W})^{f} \cdot \left(w_{x}^{W} \right)^{2} + \left(N_{y}^{W} \right)^{f} \cdot \left(w_{yy}^{W} \right)^{2} + 2 \cdot \left(N_{yy}^{W} \right)^{f} \cdot \left(w_{yy}^{W} \right) \right] dx dy \\ + & (17.2) \end{cases}$$

$$U_{M2}^{W} = \frac{1}{2} \iint_{S} \left[D_{11}^{W} \cdot \left(w_{xx}^{W} \right)^{2} + D_{22}^{W} \cdot \left(w_{yy}^{W} \right)^{2} + 2 \cdot D_{12}^{W} \cdot \left(w_{yy}^{W} \right) + 4 \cdot D_{66}^{W} \cdot \left(w_{yy}^{W} \right)^{2} \right] dx dy \end{cases}$$

$$U_{2}^{W} = \begin{cases} U_{N2}^{FI} = \frac{1}{2} \iint_{S} \left[A_{11}^{FI} \cdot \left(u_{x}^{FI} \right)^{2} + \left(N_{x}^{FI} \right)^{f} \cdot \left(\left(v_{xx}^{FI} \right)^{2} + \left(w_{xx}^{FI} \right)^{2} \right) \right] dx dz$$

$$U_{2}^{FI} = \begin{cases} U_{N2}^{FI} = \frac{1}{2} \iint_{S} \left[D_{11}^{FI} \cdot \left(v_{xx}^{FI} \right)^{2} + 4 \cdot D_{66}^{FI} \cdot \left(v_{xx}^{FI} \right)^{2} \right] dx dz$$

$$(17.3)$$

Conforme se referiu anteriormente, para efetuar a análise linear de estabilidade, apenas se procedeu à retenção dos termos compostos de 2.ª ordem em u, $v \in w$. São apresentadas em Anexo (A.1 a A.14) as formas finais das deformações, simplificadas pela ausência dos termos de ordem superior e pela não consideração dos termos lineares (nulos). Os esforços de membrana "fundamentais" obtidos em EPT encontram-se igualmente detalhados em Anexo (A.15).

3 Solução analítica

3.1 Configuração deformada – instabilidade lateral por flexão-torção

É reconhecido que as vigas pultrudidas com secção em I são suscetíveis a instabilizar (i) num modo local se o vão livre for curto

(distorção – Figura 4(b)), (ii) num modo lateral-distorcional se o vão livre for moderado (flexão-torção-distorção – Figura 4(c)) ou (iii) num modo lateral se o vão livre for longo (flexão-torção – Figura 4(a)).





Como se referiu anteriormente, a formulação apresentada na Secção 2 não assumiu qualquer forma relativa ao modo como a secção se pode deformar. Por esse motivo, a formulação é válida para analisar quaisquer tipos de instabilidade (local, lateral-distorcional e lateral). Por exemplo, a instabilidade lateral-distorcional caracteriza--se pela deformabilidade transversal da alma e pela rotação de "corpo rígido" dos banzos (rotação dos banzos por compatibilidade, em torno do "nó" de ligação banzo-alma). Esta situação exige um número maior de graus de liberdade para uma resolução do problema. Em algumas investigações [9,16] foi estudado este fenómeno considerando uma deformação distorcional descrita por um campo de deslocamentos com quatro graus de liberdade (w^{F5} , w^{FI} , $\phi^{F5} e \phi^{FI}$). Nesta secção, aplica-se a formulação proposta ao caso da instabilidade lateral por flexão-torção (*cf.* Figura 4(a)) [4].

Nesse sentido, e no contexto do presente estudo, particulariza--se o campo de deslocamentos para uma configuração deformada caracterizada por dois graus de liberdade: uma rotação de torção (ϕ) e um deslocamento lateral (*w*), em torno do eixo de menor inércia. Os deslocamentos nas três paredes da secção podem ser escritos na forma:

Banzo superior ^{FS} (plano X-Z) Alma^W (plano X-Y) Banzo inferior ^{FI} (plano X-Z)

$$\underline{u}^{FS} = \begin{cases} u^{FS}_{(x,z)} = z \cdot w^{FS}_{x} \\ v^{FS}_{(x,z)} = z \cdot tan \phi^{FS}_{(x)} \cong z \cdot \phi^{FS}_{(x)} \underline{u}^{W} = \begin{cases} u^{W} = 0 \\ v^{W} = 0 \\ w^{W} = w^{W}_{(x,y)} \end{cases} e^{FI} = z \cdot tan \phi^{FI}_{(x)} \cong z \cdot \phi^{FI}_{(x)} (18)$$

As expressões (18) estão escritas em função dos deslocamentos do centro de gravidade de cada parede, podendo ser rescritas em termos do deslocamento lateral W^{S} e da rotação ϕ^{S} do centro de corte S da secção. Nessa representação, despreza-se o deslocamento primário V^{S} (ou deslocamento de pré-encurvadura da secção transversal),

associado à flexão em torno do eixo de maior inércia. Desta forma, as relações entre os deslocamentos e rotações das paredes com os do centro de corte S da secção são dados por:

Deslocamentos laterais Rotações de torção

$$w_{(x)}^{FS} = w_{(x)}^{S} + \frac{h}{2} \cdot \phi_{(x)}^{S} w_{(x,y)}^{W} = w_{(x)}^{S} - y \cdot \phi_{(x)}^{S} \qquad | \phi_{(x)}^{FS} = \phi_{(x)}^{W} = \phi_{(x)}^{Fi} = \phi_{(x)}^{S}$$

$$w_{(x)}^{Fi} = w_{(x)}^{S} - \frac{h}{2} \cdot \phi_{(x)}^{S}$$

$$(19)$$

A introdução de (19) em (18) implica que todo o campo de deslocamentos fica definido em função de apenas dois graus de liberdade ($W^s e \phi^s$).

3.2 Método de Rayleigh-Ritz

Em seguida, resolve-se o comportamento do sistema estrutural "discretizado" nos dois graus de liberdade citados ($W^{s} e \phi^{s}$). Na definição das soluções aproximadas do problema admite-se que cada componente do vetor dos deslocamentos $\underline{\vec{u}}^{\kappa} \equiv \left\{ \overline{W}_{(x)}^{s} \quad \overline{\phi}_{(x)}^{s} \right\}$ tem a forma

$$\begin{cases} \overline{W}_{(x)}^{s} \\ \overline{\phi}_{(x)}^{s} \end{cases} = \begin{cases} W^{s} \\ \phi^{s} \end{cases} \cdot \Psi_{(x)}$$
 (20)

onde os parâmetros $W^{s} e \phi^{s}$ correspondem, efetivamente, aos graus de liberdade do sistema discretizado e $\psi_{(x)}$ é a função de forma que tem de satisfazer "apenas" as condições de fronteira cinemáticas da viga. Sublinha-se que para cada função de forma escolhida corresponderá um modelo de viga em análise, associado aos casos de estudo 1. e 2. (inicialmente referidos), assumindo o sistema (20) uma forma distinta. O mesmo será dizer que cada função $\psi_{(x)}$ "obriga" a viga a deformar-se de modo distinto, consoante uma das sete formas pretendidas, dentro das selecionadas no presente estudo, como se expõe de seguida. As condições de apoio de uma viga, relativamente a um problema de instabilidade lateral de vigas, envolvem flexão (em dois planos), torção e impedimento de empenamento. Estas condições traduzem as restrições aos deslocamentos generalizados das suas secções transversais e dependem das características dos apoios de extremidade e das condições de contraventamento lateral.

Dada a existência de um número elevado de possíveis condições de apoio de vigas, optou-se por abordar aqui, unicamente, os casos representados na Quadro 1, procurando-se reproduzir condições experimentais habituais para vigas ensaiadas à flexão. Considerando a viga simplesmente apoiada no plano X-Y, estudou-se a influência dos apoios no plano de menor inércia (X-Z) e o efeito do travamento lateral imposto na região central da viga, os quais se traduzem nas sete combinações resumidas na mesma Quadro 1.

Dentro do leque de funções de forma existentes na literatura [18,19], que permitem aproximar a deformação de elementos por encurvadura (*e.g.*, funções transcendentais, polinomiais, etc.), apenas se consideram funções trigonométricas simples (seno e cosseno) de modo a obter expressões analíticas aproximadas

também simples, *cf.* Quadro 1. Uma vez definida a energia potencial do sistema contínuo (12), a aplicação do método de RAYLEIGH-RITZ para cada caso de estudo envolve a substituição do vetor definido em (20), com as respetivas funções de forma, no funcional energia Π_2 . Esta operação "transforma-o" na função da energia potencial do sistema discretizado, a qual é uma forma quadrática dos parâmetros $W^{\rm s}$ e $\phi^{\rm s}$ que, efetuando *a posteriori* as integrações necessárias, se representa por $\Pi_2 [W^{\rm s}, \phi^{\rm s}, \lambda]$.

3.3 Sistema de equações de equilíbrio

O *Princípio da Estacionariedade da Energia Potencial* (PEEP) estabelece que a primeira variação da energia potencial em relação aos deslocamentos generalizados deve ser nula para que exista equilíbrio (critério do equilíbrio adjacente). Por isso, a condição de equilíbrio deve ser satisfeita:

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_i} = 0 \iff \frac{\partial \Pi_2}{\partial W^5} = 0 \land \frac{\partial \Pi_2}{\partial \varphi^5} = 0$$
(21)

No caso do perfil estrutural com estados lineares de pré-encurvadura, é-se conduzido ao sistema de equações lineares (dimensão 2×2) definido por:

$$\begin{bmatrix} K_{ij} + \lambda \cdot G_{ij} \end{bmatrix} \cdot q_j = 0 \quad \left\{ \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{bmatrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} W^s \\ \varphi^s \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} (22)$$

em que as matrizes de rigidez linear, $K_{ij'}$ e rigidez geométrica, $G_{ij'}$ dependem das funções de forma. Ambas as matrizes contêm termos relativos às três paredes (alma e dois banzos), e a matriz geométrica contém a influência dos esforços de membrana em cada parede. O somatório das componentes diagonais das matrizes G_{ij} relativas aos banzos resulta sempre em valores nulos em virtude da forma bissimétrica da secção. Na situação de carga aplicada ao nível do centro de corte *S*, a diagonal da matriz global G_{ij} é também nula.

A expressão (22) corresponde a um *problema de valores e vetores próprios*, cujas soluções não nulas correspondem ao anulamento do determinante. As raízes da equação característica resultante do anulamento do determinante de (22) correspondem aos dois primeiros valores do parâmetro de carga de bifurcação (λ_1, λ_2), sendo λ_1 o valor do parâmetro crítico. O presente estudo centra-se apenas na determinação de uma estimativa da carga crítica de encurvadura em vigas, reduzindo-se ao cálculo da menor raiz, λ_1 , da equação característica (22). Para a resolução do problema proposto e tendo em conta as variáveis consideradas, implementou-se a formulação descrita anteriormente num algoritmo numérico utilizando a linguagem de programação comercial MATLAB.R14[®].

3.4 Soluções analíticas aproximadas

Com o objetivo de obter expressões analíticas para a viga solicitada no centro de corte *S*, todas as variáveis de dimensão da secção, de caracterização do material, de aplicação de carga e de condições de apoio foram consideradas como variáveis simbólicas. De forma a obter a variação da solução analítica com o comprimento da viga de GFRP, também se considerou o comprimento *L* como uma





variável simbólica. Desta forma, utilizou-se a linguagem simbólica do programa MATLAB.R14[®] para obter a seguinte expressão para o cálculo da carga crítica da viga:

$$P_{cr} = \frac{C_{_PB}^{te}}{\xi \cdot l^3} \cdot \sqrt{\beta_1 \cdot \left(\pi^2 \cdot \beta_2 + l^2 \cdot \xi \cdot \beta_3\right)}$$
(23)

onde todos os parâmetros são definidos em seguida. Esta expressão, apesar de limitada à situação de carga aplicada ao nível do centro de corte *S* (*i.e.*, $y^{\rho} = 0$), abrange as soluções associadas aos sete modelos de viga, no que respeita às várias combinações de condições de apoio e de contraventamento lateral, *vd*. Quadro 2. As condições de apoio e travamento são reproduzidas por meio dos parâmetros $\xi e c^{te}_{_{\mathcal{P}B}}$ que se encontram representados na Quadro 2, onde $c^{te}_{_{\mathcal{P}B}}$ também tem em conta o tipo de flexão (*3PB* ou *4PB*).

Quanto aos parâmetros de rigidez β_i (i = 1, 2, 3), estes são fornecidos na Quadro 3 e permitem considerar a geometria da secção e as

propriedades de rigidez dos banzos e da alma. Se as propriedades da alma e dos banzos forem diferentes tem-se $Q_{ij}^{r} \neq Q_{ij}^{w}$ e se forem iguais tem-se $Q_{ij}^{r} = Q_{ij}^{w}$.

Observe-se que a Eq. (23) e os parâmetros envolvidos não dependem diretamente das espessuras dos banzos e da alma, o que se deve ao facto de se ter considerado as dimensões da secção à sua linha média (e.g., momento de inércia *I*, considerado em (7)).

Por fim, e como exemplo da aplicação geral da equação proposta, a solução correspondente à viga V1.AS em flexão a *4-pontos*, toma a seguinte forma:

$$P_{cr} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^{3}}{\left(\pi^{2} + (3/2)^{3}\right)} \cdot \left[\pi^{2} \cdot \left(h^{2} \cdot b^{3} \cdot A_{11}^{r} + 4 \cdot h^{3} \cdot D_{11}^{r} + 2 \cdot h^{2} \cdot D_{11}^{W}\right) + L^{2} \cdot \left(2 \cdot h \cdot D_{66}^{r} + h \cdot D_{66}^{W}\right)\right]}{L^{3}}$$
(24)

4 Ilustração e validação de resultados

Com o objetivo de ilustrar e validar a formulação descrita, bem como as expressões analíticas propostas, apresentam-se dois estudos comparativos. O primeiro estudo baseia-se numa viga (secção-H) testada experimentalmente e analisada numericamente por Davalos e Qiao [16,17]. O segundo estudo baseia-se numa viga com secção em I testada experimentalmente por Sá [4].

A Figura 5 apresenta o resultado da aplicação da Eq. (23) sobre o modelo de análise estudado por Davalos e Qiao [16,17] – viga simplesmente apoiada, sob flexão *3PB*, articulada nos apoios

Quadro 2 Valores das constantes $\xi e c^{te}_{PB}$ da equação proposta, *cf.* Eq. (23)

Vigas		Vão lateral	Carregamento			
		ξ	C ^{te} _3PB	C ^{te} _4PB		
vamento	V1.AS	1	$\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi^3}{\left(\pi^2+2^2\right)}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^{3}}{(\pi^{2} + (3/2)^{3})}$		
Sem tra	V2.ES	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi^3}{\left(\pi^2+2\cdot 2^2\right)}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^3}{\left(\pi^2 + 1,75 \cdot (3/2)^3\right)}$		
	V3.LR	1	$\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi^3}{\left(\pi^2-2^2\right)}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^{3}}{(\pi^{2} - (3/2)^{3})}$		
0	V4.AR	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}\cdot\pi$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^3}{\left(\pi^2 + 0.25 \cdot (3/2)^3\right)}$		
om travament	V5.ER	<u>5</u> 41	$\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi^3}{\left(\pi^2 + 0.8 \cdot 2^2\right)}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^3}{\left(\pi^2 + 1, 15 \cdot (3/2)^3\right)}$		
0	V6.EF	<u>1</u> 20	$\frac{2}{3}\cdot\pi$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^3}{(\pi^2 + 0.4375 \cdot (3/2)^3)}$		
	V7.LF	$\frac{6\cdot\pi-8}{(15\cdot\pi-32)}$	$\pi^2 \cdot \frac{(6 \cdot \pi - 8)}{(9 \cdot \pi^2 - 98)}$	$8 \cdot \pi^2 \cdot \frac{(6 \cdot \pi - 8)}{(4096 \cdot \pi^4 - 10368 \cdot \pi^2 - 382239)} \cdot \Omega^{-0.5^*}$		

* $\Omega = 4096 \cdot \pi^4 + 46080 \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{3} - 10368 \cdot \pi^2 - 58320 \cdot \sqrt{3} + 395361$

Quadro 3	Expressões	para o	parâmetro	de	rigidez	da	Eq.	(23))
----------	------------	--------	-----------	----	---------	----	-----	------	---

Constantos alásticos		Parâmetro de rigidez	
	β	β ₂	β ₃
$Q^{f}_{ij} \neq Q^{W}_{ij}$	$b^{3}.A_{11}^{F}+6\cdot h\cdot D_{11}^{W}$	$h^2 \cdot b^3 \cdot A_{11}^r + 4 \cdot b^3 \cdot D_{11}^r + 2 \cdot h^3 \cdot D_{11}^W$	$2 \cdot b \cdot D_{66}^{F} + h \cdot D_{66}^{W}$
$Q_{ij}^F = Q_{ij}^W$	$6 \cdot h \cdot D_{\eta} + b^3 \cdot A_{\eta}$	$(2\cdot h^3 + 4\cdot b^3)\cdot D_{ii} + h^2\cdot b^3\cdot A_{ii}$	$(h+2\cdot b)\cdot D_{66}$

segundo o plano de menor inércia e sem restrição lateral a meio vão (*i.e.*, correspondente ao modelo V1.AS).



Figura 5 Comparação entre cargas críticas estimadas, em função do vão, para um perfil H (*3PB*)

A comparação de resultados da Figura 5 é traduzida por meio da evolução das cargas críticas estimadas, P_{cr}, em função do vão, L, considerando as características geométricas e as propriedades mecânicas do perfil H ($304,8 \times 304,8 \times 12,7$ mm) analisado pelos autores. As curvas $P_{cr} - L$, apresentadas na Figura 5, distinguem-se quanto à posição do ponto de aplicação das cargas na altura da secção. Sobre aquelas curvas são ainda apontados os respetivos valores obtidos pelos primeiros autores, quer analiticamente (163,1 kN e 96,6 kN, para a carga aplicada no centro de corte e no banzo superior, respetivamente), quer experimentalmente (138,2 kN, para carga aplicada a meia altura entre banzo superior e centro de corte) para uma viga com 4420 mm de vão [16,17]. As reduzidas diferenças (ca. 5%) entre as estimativas daqueles autores e as obtidas com base na solução analítica (carga no centro de corte), e numérica (carga no banzo superior) do presente estudo devem-se ao processo de resolução das equações de equilíbrio resultantes das formulações energéticas, nomeadamente ao nível do processamento das funções integrais. A carga experimental com um valor, praticamente, intermédio aos resultados analítico e numérico traduz a boa correlação existente ao nível daqueles resultados de diferente índole.

De seguida, estimam-se as cargas críticas resultantes da aplicação da formulação proposta numa viga de GFRP testada experimentalmente por Sá [4]. Esta viga tem um perfil I (150 × 75 × 8 mm) e um vão de 1800 mm. As componentes de rigidez dos banzos (iguais) e da alma introduzidas na formulação (5,6), associadas às matrizes de rigidez de membrana e de flexão (A_{ij} e D_{ij}), corresponderam às estabelecidas por caracterização mecânica experimental [4]. Na Quadro 4 encontram-se resumidos apenas os valores dos coeficientes de rigidez que contribuem para a resolução da formulação, assumindo as mesmas constantes elásticas em ambos os elementos de placa, mas mantendo a espessura "exata" associada a cada um deles.

As Figuras 6(a) e 6(b) representam os valores dessas cargas críticas, $P_{\rm ext}$ obtidas respetivamente para flexão 3PB e 4PB, onde se ilustram os resultados teóricos para os sete casos de estudo de vigas (i.e., condições de apoios laterais, cf. Quadro 1). Na Figura 6(b) mostram--se ainda os valores das cargas últimas de rotura, P., obtidas no ensaio experimental de duas vigas (I-1 e I-2) [4]. Como seria expectável, o aumento da resistência à instabilidade lateral da viga é tanto mais significativo quanto maior for o grau de restrições impostas sobre esta, nomeadamente ao impedimento da torção e do empenamento, quer nos apoios quer na secção central. Verifica-se uma forte dependência entre estas restrições e os valores estimados, sobretudo em vigas de esbelteza reduzida. Porém, para vigas longas, onde é mais provável a ocorrência deste fenómeno, é notória a capacidade resistente conferida pela restrição total à flexão lateral e ao empenamento nas vigas V6.EF e V7.LF, comparativamente com as demais. Como exemplo, para um vão de 3,6 m, o valor de P_{cc} na viga V6.EF é 14 vezes superior ao valor obtido na viga V1.AS à flexão 4PB (carga em S), ao passo que em 3PB o aumento, devido a um total encastramento nos apoios e secção central, mantém-se igualmente numa proporção elevada (ca. 10).



Figura 6 Variação da carga crítica teórica com o vão para flexão: a) 3PB e b) 4PB

Verifica-se que quaisquer que sejam as restrições impostas às vigas no plano X-Z, a flexão 3PB é sempre mais condicionante à ocorrência da instabilidade relativamente ao carregamento em

E	3anzos [<i>t_F</i> = 8,21 mm]	Alma [t _w = 8,23 mm]			
A [⊬] 11 (N/m)	<i>D</i> [⊧] ₁₁ (N.m)	<i>D</i> ^{<i>F</i>} ₆₆ (N.m)	<i>D^w</i> ₁₁ (N.m)	<i>D^w</i> ₁₂ (N.m)	<i>D^w</i> ₂₂ (N.m)	<i>D</i> ^{<i>w</i>} ₆₆ (N.m)
209,28 × 10 ⁶	1175,50	108,37	1184,11	103,24	364,80	109,17

Quadro 4 Coeficientes de rigidez das placas pultrudidas do perfil I (150 × 75 × 8 mm)

dois pontos simétricos no vão. Faz-se notar uma dependência mais significativa do tipo de flexão nas duas vigas não contraventadas relativamente às travadas, onde a partir de vãos curtos (*ca.* 2,0 m) as curvas correspondentes àquelas vigas são as que apresentam praticamente os valores mais reduzidos de P_{cr} .

Facilmente se constata que P_{cc} diminui quando as cargas estão aplicadas "acima" de S (efeito "amplificativo" da rotação da secção) e aumenta no caso contrário (contraria-se a torção). Para cada solução estudada sobre a influência das condições de travamento no valor de P_{er}, registam-se variações entre os resultados dos seus respetivos pares de curvas (consoante a posição das cargas), que chegam a atingir 30% em 4PB e 50% em 3PB. Estas diferenças percentuais tendem a estabilizar à medida que o vão aumenta. Para ambos os tipos de flexão, as variações mais significativas ocorrem nas vigas sem travamento lateral, onde na V2.ES resultam estimativas de P_ aplicadas em S mais afastadas das obtidas guando aplicadas no banzo superior. No caso contrário, as vigas travadas apresentam diferenças muito menores, sobretudo em 3PB, cujo "paralelismo" das curvas também vai de encontro ao observado nas curvas em 4PB, mas onde a influência do ponto de aplicação das cargas aplicadas sobre o valor de P_{cr} é um pouco mais relevante do que a verificada em 3PB (apenas 2–3%).

De um conjunto de perfis testados experimentalmente [4], as vigas de ensaio atrás mencionadas foram submetidas à flexão 4PB (em torno do eixo de maior inércia), em modelo de viga simplesmente apoiada, por meio de carregamento transversal simétrico (cargas concentradas a terços do vão). Ambas foram igualmente contraventadas lateralmente na secção de meio vão. No que respeita às condições de apoio, apenas a viga I-2 foi "travada" no plano de menor inércia, não se tendo imposto quaisquer restrições laterais à viga I-1. Com efeito, as restrições impostas ao movimento de corpo rígido, quer sobre a secção central de ambas as vigas, quer os travamentos laterais nas secções de apoio da viga I-1, impediram os deslocamentos transversais (para fora do plano de solicitação) e garantiram um certo nível de restrição à rotação em torno do eixo de menor inércia (flexão lateral). A rotação em torno do eixo longitudinal do perfil 1 (torção) foi parcialmente impedida nas secções de extremidade devido ao impedimento à rotação por torção do banzo apoiado (inferior). Relativamente ao empenamento, as secções de extremidade são livres de empenar. Os ensaios foram conduzidos em controlo de carga, aplicada monotonicamente até ocorrer a rotura dos perfis.

A Figura 7 representa as curvas da evolução da carga em função do deslocamento a meio vão, $(P - \delta)$, para as duas vigas, sobre as quais se assinalam as respetivas cargas últimas, P_u , obtidas experimentalmente, bem como as tensões longitudinais últimas,

 $\mathbf{\sigma}_{_{\textit{fu},l'}}$ e os respetivos módulos de elasticidade "aparente" em flexão, $\textit{E}_{_{ao}}$



Figura 7 Curvas $P - \delta$ e estimativas de cargas críticas das vigas I -1 e I-2

A rotura da viga I-1 foi devida a fenómeno (abrupto) de instabilidade global – por flexão-torção –, tendo sido verificado um claro efeito assimétrico da rotação de torção da viga relativamente à secção central contraventada, *vd.* Figura 8.



Figura 8 Rotura por encurvadura lateral por flexão-torção da viga I-1

A rotura da viga I-2 foi iniciada pelo desenvolvimento de microfissuração longitudinal numa das zonas superiores da ligação banzo--alma, conduzindo ao esmagamento localizado da alma, sob um ponto de aplicação da carga. Seguiu-se o enrugamento do material, provocando imediata e simultaneamente encurvadura local numa das metades do banzo comprimido e alguma delaminação dispersa.

Aplicando a formulação analítica, e à semelhança do indicado na Figura 6(b), na Figura 7 são ainda assinaladas as estimativas das cargas críticas, para um vão de 1800 mm, em correspondência com as configurações experimentais adotadas, i.e., efetuando a associação entre os casos analíticos de viga - V3.LR e V4.AR - e as condições de ensaio mais prováveis de os representar respetivamente: I-1 e I-2. Da análise da Figura 6(b) e da Figura 7 verifica-se que os valores experimentais das cargas últimas das vigas I-1 e I-2 são 23% e 4% superiores aos valores estimados considerando as curvas analíticas V3.LR e V4.AR, respetivamente (estimativas teóricas médias para carga aplicada no centro de corte e no banzo superior). Na realidade, aquela diferença mais significativa pode ser atribuída às forças de compressão (reação) instaladas sob os apoios "livres" da viga I-1. Consequentemente, o efeito de atrito gerado pode ter sido responsável pela introdução de um determinado nível de restrição ao deslocamento transversal, não sendo por isso expectável que o valor da carga crítica observado experimentalmente corresponda efetivamente à carga crítica obtida da solução analítica correspondente à situação idealizada V3.LR. Nessa medida, é plausível que a capacidade última da viga (por instabilidade lateral) se possa prever numa situação intermédia quanto ao grau de restrição lateral sobre os apoios, entre estes serem modelados nas condições "L" (livre) e "R" (rotulada), correspondentes aos graus de liberdade ($W^{s} \in \phi^{s}$) considerados na formulação analítica (carga última 40% inferior à estimada para viga articulada nos apoios – V4.AR).

Do mesmo modo, da incerteza da configuração experimental da viga I-2 ao nível dos sistemas adotados no ensaio (apoios e travamento central), podem relacionar-se diversas estimativas analíticas (V4.AR ou V5.ER ou V6.EF) a serem numericamente correspondidas às condições impostas no ensaio, como forma de traduzir uma representação possível das suas capacidades resistentes à encurvadura. No entanto, pelo valor da carga última e, sobretudo, pelo modo de rotura da viga I-2, pode concluir-se que os apoios restringiram quase por completo a rotação de flexão lateral, mas não garantiram um impedimento total ao empenamento. Face às condições de restrição impostas a esta viga justifica-se que a resistência do material tenha sido condicionante à rotura do perfil, para valores de tensão inferiores aos correspondentes às cargas de bifurcação esperadas em instabilidade lateral por flexão-torção. Além disso, neste caso, o colapso envolveu uma rotura em modo combinado ou, em parte, seguido de instabilidade local ao nível do banzo comprimido na zona onde se verificou esmagamento da alma.

5 Conclusões

Neste artigo foi desenvolvida uma formulação analítica que permite analisar a encurvadura lateral por flexão-torção de vigas pultrudidas de GFRP, com secção de parede fina aberta bissimétrica, solicitadas à flexão em 3- e 4-pontos. A formulação sobre a análise linear de estabilidade foi baseada em princípios energéticos – estacionarização (PEEP), e recorreu ao método de RAYLEIGH-RITZ para discretização do sistema contínuo. Para além de contribuir para um melhor

entendimento do comportamento à rotura de vigas em modo de instabilidade, o presente estudo permitiu analisar um conjunto de soluções sobre a influência das condições de apoio e de travamento na secção central (no plano de menor inércia) no valor das cargas críticas estimadas. Destaca-se o facto de a formulação apresentada ser aplicável à análise de estabilidade de vigas com secção em I ou H de banzos iguais (dupla simetria), sem a obrigatoriedade de as espessuras dos banzos serem idênticas à da alma, assim como no que respeita às componentes de rigidez de ambos os tipos de placas, sendo possível uma introdução individualizada das respetivas propriedades de rigidez. Com base na formulação apresentada, desenvolveu-se uma expressão simplificada de aplicação geral que permite estimar cargas críticas, em função de parâmetros incluídos na equação proposta, associados a diversos casos de análise. A formulação proposta e a expressão analítica desenvolvida foram validadas com base na comparação dos resultados por elas obtidos com valores numéricos e outros resultados experimentais existentes na literatura.

Agradecimentos

Os autores agradecem os apoios dados pelo ICIST e IST, onde o estudo apresentado neste artigo foi realizado, e à empresa STEP pelo fornecimento dos perfis GFRP. O primeiro autor agradece à FCT o financiamento conferido pela bolsa de doutoramento n.º SFRH/BD/42798/2007.

Referências

- Bank, L.C. (2006) Composites for Construction. John Wiley & Sons, New Jersey.
- [2] Keller, T. (2003) "Use of fibre reinforced polymers in bridge construction". In Structural Engineering Documents, 7; IABSE, Zurich.
- [3] Correia, J.R. (2008) GFRP Pultruded Profiles in Civil Engineering: Hybrid Solutions, Bonded Connections and Fire Behaviour. Tese de Doutoramento, IST, UTL, Lisboa.
- [4] Sá, M.F. (2007) Comportamento Mecânico e Estrutural de FRP. Elementos Pultrudidos GFRP. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, IST, UTL, Lisboa.
- [5] Bauld, N.R.; Tzeng, L.S. (1984) "A Vlasov Theory for fibre-reinforced beams with thin-walled open cross sections". *International Journal of Solids & Structures*, 20(3):277-297.
- [6] Correia, J.R.; Branco, F.A.; Silva, N.F.; Camotim, D.; Silvestre, N. (2011) "First-order, buckling and post-buckling behaviour of GFRP pultruded beams part 1: Experimental Study". *Computers & Structures*, 89(21-22):2052–2064.
- [7] Silva, N.F.; Camotim, D., Silvestre N., Correia J.R., Branco, F.A., (2011) "First-order, buckling and post-buckling behaviour of GFRP pultruded beams part 2: Numerical Study". *Computers & Structures*, 89(21-22):2065–2078.
- [8] Brooks R.J.; Turvey G.J. (1995) "Lateral buckling of pultruded GRP I-section cantilevers". Composite Structures, Vol. 32:203-215.

- Ma, M.; Hughes, O. (1996) "Lateral distortional buckling of monosymmetric I-beams under distributed vertical load". *Thin Walled Structures*, 26(2):123-145.
- [10] Barbero, E.J.; Raftoyiannis, I.G., (1994) "Lateral and distortional buckling of pultruded I-beams". Composite Structures, 27(3):261-280.
- [11] Pandey, M.; Kabir, M.Z.; Sherbourne, A.N.(1995) "Flexural-torsional stability of thin walled composite I-section beams". *Composites: Part* B, 5(3):321-342.
- [12] Mottram, J.T. (1992.a) "Lateral-torsional buckling of a pultruded I-beam". Composites, 23(2):81-92.
- [13] Mottram, J.T. (1992.b) "Lateral-torsional buckling of thin walled composite I-beams by the Finite Difference Method". *Composites Eng.*, 2(2):91-104.
- [14] Reis, A.; Camotim, D., (2001) *Estabilidade Estrutural*. McGraw-Hill, Lisboa.
- [15] Trahair, N.S. (1993) Flexure-Torsional of Buckling of Structures. CRC Press, New York.
- [16] Davalos, J.F.; Qiao, P.Z. (1997) "Analytical and experimental study of lateral and distortional buckling of FRP wide-flange beams". *Journal of Composites for Construction*, 1(4):150-159.
- [17] Davalos, J.F.; Qiao P.Z.; Salim H.A. (1997) "Flexure-torsional buckling of pultruded fibre-reinforced plastic composite I-beams: experimental and analytical evaluations". *Composite Structures*, 38(1-4):241–250.
- [18] Qiao, P.Z.; Zou, G.; Davalos, J.F., (2003) "Flexural-torsional buckling of FRP composite cantilever I-beams". *Composite Structures*, 60:205–217.
- [19] Shan, L.; Qiao, P.Z. (2005) "Flexural-torsional buckling of fibrereinforced plastic composite open channel beams". *Composite Structures*, 68:211-224.
- [20] Jones, R.M. (1999) Mechanics of Composite Materials; Taylor & Francis, Philadelphia.

Anexo

Formas finais dos termos das deformações descritas em (9), simplificadas pela ausência dos termos de ordem superior e não consideração dos termos lineares (nulos).

Banzo Superior ^{FS}

$$\left(\epsilon_{x}^{\prime 5}\right)^{2} = \left(U_{x}^{\prime 5}\right)^{2} + U_{x}^{\prime 5} \cdot \left[\left(W_{x}^{\prime 5}\right)^{2} + \left(V_{x}^{\prime 5}\right)^{2}\right] + 1/4 \cdot \left[\left(W_{x}^{\prime 5}\right)^{2} + \left(V_{x}^{\prime 5}\right)^{2}\right]^{2} \approx \left(u_{x}^{\prime 5}\right)^{2} + \left[U_{x}^{\prime 5}\right]^{\prime} \cdot \left[\left(v_{x}^{\prime 5}\right)^{2} + \left(w_{x}^{\prime 5}\right)^{2}\right] \left(A.1\right)^{2} + 1/4 \cdot \left[\left(W_{x}^{\prime 5}\right)^{2} + \left(W_{x}^{\prime 5}\right)^{2}\right]^{2} + 1/4 \cdot \left[\left(W_{x}^{\prime 5}\right)^{2} + \left(W_{x}^{\prime 5}\right)^{2} + \left(W_{x}$$

$$\left(\chi_{x}^{F5}\right)^{2} = \left(V_{,xx}^{F5}\right)^{2} \approx \left(v_{,xx}^{F5}\right)^{2}$$
(A.2)

$$\left(\chi_{xz}^{FS}\right)^{2} = \left(2 \cdot V_{xz}^{FS}\right)^{2} \approx 4 \cdot \left(V_{xz}^{FS}\right)^{2}$$
 (A.3)

• Alma ^w

 $\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{x}^{W} \right)^{2} = \left(U_{x}^{W} \right)^{2} + U_{x}^{W} \cdot \left[\left(V_{x}^{W} \right)^{2} + \left(W_{x}^{W} \right)^{2} \right] + \frac{1}{4} \cdot \left[\left(V_{x}^{W} \right)^{2} + \left(W_{x}^{W} \right)^{2} \right]^{2} \approx \left[U_{x}^{W} \right]^{f} \cdot \left(w_{x}^{W} \right)^{2} \left(A.4 \right)$ $\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{y}^{W} \right)^{2} = \left(V_{y}^{W} \right)^{2} + V_{y}^{W} \cdot \left[\left(U_{y}^{W} \right)^{2} + \left(W_{y}^{W} \right)^{2} \right] + \frac{1}{4} \cdot \left[\left(U_{y}^{W} \right)^{2} + \left(W_{y}^{W} \right)^{2} \right]^{2} \approx \left[V_{y}^{W} \right]^{f} \cdot \left(w_{y}^{W} \right)^{2} \left(A.5 \right)$ $\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{y}^{W} \right) \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{y}^{W} \right)^{2} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{y}^{W} \right)^{2} + \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{y}^{W} \right)^{2} + \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{y}^{W} \right)^{2} \right] \cdot \left[\boldsymbol{\varepsilon}_{y}^{W} \right]^{2} \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{y}^{W} \right)^{2} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{y}^{W} \right)^{2} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{y}^{W} \right)^{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{y}^{W} \right)^{2} \right] \cdot \left[\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{y}^{W} \right)^{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{y}^{W} \right)^{2$

$$\left(\chi_{x}^{W}\right)^{2} = \left(W_{,xx}^{W}\right)^{2} \approx \left(w_{,xx}^{W}\right)^{2} \tag{A.8}$$

$$\left(\chi_{\mathcal{Y}}^{W}\right)^{2} = \left(W_{\mathcal{Y}}^{W}\right)^{2} \approx \left(W_{\mathcal{Y}}^{W}\right)^{2}$$
(A.9)

$$(\chi_{x}^{w}) \cdot (\chi_{y}^{w}) = (W_{,x}^{w}) \cdot (W_{,yy}^{w}) \approx (w_{,xy}^{w}) \cdot (w_{,yy}^{w})$$
 (A.10)

$$\left(\chi_{xy}^{W}\right)^{2} = \left(2 \cdot W_{,xy}^{W}\right)^{2} \approx 4 \cdot \left(W_{,xy}^{W}\right)^{2} \tag{A.11}$$

Banzo Inferior FI

 $\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{x}^{n} \right)^{2} = \left(\boldsymbol{U}_{x}^{n} \right)^{2} + \boldsymbol{U}_{x}^{n} \left[\left(\boldsymbol{W}_{x}^{n} \right)^{2} + \left(\boldsymbol{Y}_{x}^{n} \right)^{2} \right] + \frac{1}{2} 4 \cdot \left[\left(\boldsymbol{W}_{x}^{n} \right)^{2} + \left(\boldsymbol{Y}_{x}^{n} \right)^{2} \right]^{2} \approx \left(\boldsymbol{u}_{x}^{n} \right)^{2} + \left[\boldsymbol{U}_{x}^{n} \right]^{2} \cdot \left[\left(\boldsymbol{v}_{x}^{n} \right)^{2} + \left(\boldsymbol{w}_{x}^{n} \right)^{2} \right] \left(\boldsymbol{A}.12 \right)$

$$\left(\chi_{x}^{F_{l}}\right)^{2} = \left(V_{,xx}^{F_{l}}\right)^{2} \approx \left(V_{,xx}^{F_{l}}\right)^{2}$$
(A.13)

$$\left(\chi_{\mathcal{A}}^{\mathcal{F}_{l}}\right)^{2} = \left(2 \cdot V_{\mathcal{A}}^{\mathcal{F}_{l}}\right)^{2} \approx 4 \cdot \left(v_{\mathcal{A}}^{\mathcal{F}_{l}}\right)^{2} \tag{A.14}$$

Esforços de membrana "fundamentais", N^{f} , ao longo da trajetória fundamental:

Banzo superior FS Alma W Banzo inferior FI

$$\begin{pmatrix} (N_x^{fS})^f = A_{11} \cdot \begin{bmatrix} U_x^{fS} \end{bmatrix}^f \\ (N_x^{fS})^f = 0 \\ (N_{xy}^{fS})^f = 0 \\ (N_{xy}^{W})^f = A_{12} \cdot \begin{bmatrix} U_x^{W} \end{bmatrix}^f + A_{12} \cdot \begin{bmatrix} V_y^{W} \end{bmatrix}^f \\ (N_y^{H})^f = A_{11} \cdot \begin{bmatrix} U_x^{H} \end{bmatrix}^f + A_{22} \cdot \begin{bmatrix} V_y^{W} \end{bmatrix}^f \\ (N_x^{H})^f = 0 \\ (N_{xy}^{H})^f = A_{66} \cdot \left(\begin{bmatrix} V_x^{W} \end{bmatrix}^f + \begin{bmatrix} U_y^{W} \end{bmatrix}^f \right)^f$$
(A.15)