

Formulação de fenda discreta embebida para análise tridimensional de fratura em materiais quase-frágeis

Three-dimensional fracture simulation of quasi-brittle materials using an embedded discrete crack approach

Carlos Octávio
Daniel Dias-da-Costa
Jorge Alfaiate
Eduardo Júlio

Resumo

A abordagem de fenda discreta tem ganho cada vez mais importância para a modelação do comportamento até à rotura de materiais quase-frágeis, como o betão ou as alvenarias. Este facto deve-se sobretudo às vantagens intrínsecas a este tipo de abordagem quando comparada com a abordagem de fenda distribuída, nomeadamente no que diz respeito à independência da malha de elementos finitos. As formulações de descontinuidades embebidas existentes consideram locais os graus de liberdade adicionais, devidos às descontinuidades, o que faz com que não seja garantida a continuidade de tensões e aberturas nos nós das descontinuidades. Neste artigo apresenta-se a 3D Discrete Strong Discontinuities Approach (3D-DSDA), desenvolvida com o objetivo de simular o comportamento de elementos tridimensionais até à rotura. Foram simulados alguns exemplos com o objetivo de validar a formulação desenvolvida. Os resultados obtidos com base na 3D-DSDA foram comparados com resultados de ensaios experimentais e de simulações efetuadas considerando uma formulação bidimensional de descontinuidades fortes embebidas.

Abstract

The use of the discrete crack approach to model the fracture behaviour of quasi-brittle materials, such as concrete or masonry, has increased significantly. This is mainly due to the intrinsic advantages of this kind of approach when compared with the smeared crack approach, namely in terms of finite element mesh independence. The existing discrete crack approaches consider the additional degrees of freedom as local and, therefore, both the discontinuity jumps and tractions are not continuous along the discontinuity. In this paper the 3D Discrete Strong Discontinuities Approach (3D-DSDA) is introduced, developed with the aim of modelling the 3D fracture behaviour of quasi-brittle materials. Some examples were simulated in order to assess the capabilities of the developed formulation. The obtained results using 3D-DSDA were compared with those obtained from both experimental tests and numerical simulations using a bi-dimensional embedded strong discontinuities approach.

Palavras-chave: Materiais quase-frágeis / Abordagem de fenda discreta / Descontinuidades fortes / Descontinuidades embebidas / Modelação tridimensional de fratura

Keywords: Quasi-brittle materials / Discrete crack approach / Strong discontinuities / Embedded discontinuities / Three-dimensional fracture modelling

Carlos Octávio

CERIS, Instituto Superior Técnico
Universidade de Lisboa, Portugal
carlos.octavio@tecnico.ulisboa.pt

Daniel Dias-da-Costa

School of Civil Engineering
The University of Sydney, Austrália
ISISE, Departamento de Engenharia Civil
Universidade de Coimbra, Portugal
daniel.diasdacosta@sydney.edu.au

Jorge Alfaiate

CERIS, Instituto Superior Técnico
Universidade de Lisboa, Portugal
jorge.alfaiate@tecnico.ulisboa.pt

Eduardo Júlio

CERIS, Instituto Superior Técnico
Universidade de Lisboa, Portugal
eduardo.julio@tecnico.ulisboa.pt

Aviso legal

As opiniões manifestadas na Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

Legal notice

The views expressed in the Portuguese Journal of Structural Engineering are the sole responsibility of the authors.

Octávio, C. [et al.] – Formulação de fenda discreta embebida para análise tridimensional de fratura em materiais quase-frágeis. **Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas**. Ed. LNEC. Série III. n.º 5. ISSN 2183-8488. (novembro 2017) 37-44.

1 Introdução

Nos últimos anos têm surgido algumas abordagens de fissura discreta embebida que têm como objetivo principal uma correta simulação do comportamento à fratura de materiais quase-frágeis. Atualmente existem várias técnicas, baseadas em enriquecimento nodal ou elementar, que permitem simular o comportamento estrutural quando este é essencialmente bidimensional. No entanto, o caso tridimensional apresenta ainda várias dificuldades, em especial no que diz respeito ao aumento do número de graus de liberdade, uma vez que conduz à deterioração do desempenho computacional. Assim sendo, não existe uma técnica estabelecida para simulação de problemas tridimensionais, facto que é particularmente importante na análise à rotura de materiais cimentícios na meso-escala, onde o carácter triaxial do estado de tensão e do processo de microfissuração tem de ser devidamente considerado. Este artigo pretende, assim, apresentar uma formulação tridimensional, que corresponde à extensão para o caso 3D da *Discrete Strong Discontinuities Approach* (DSDA) [1, 2], desenvolvida no âmbito da abordagem de fissura discreta e baseada na técnica de enriquecimento elementar. Esta formulação permite o enriquecimento de elementos finitos convencionais, através da incorporação de graus de liberdade adicionais com o objetivo de medirem a abertura da fissura, sendo a transmissão da abertura para os nós do elemento efetuada considerando movimentos de corpo rígido. A formulação desenvolvida permite ainda a simulação de um dado problema utilizando um número significativamente menor de graus de liberdade adicionais, quando comparado com técnicas de enriquecimento nodal (GFEM ou XFEM) [3]. Acresce que não são necessárias integrações em subdomínios do elemento finito fissurado, o que torna a formulação mais simples de implementar.

2 Formulação variacional de uma descontinuidade forte

Nesta secção apresenta-se a cinemática da descontinuidade forte no âmbito da abordagem de fissura discreta. Considere-se o domínio Ω (ver Figura 1(a)), no qual Γ corresponde à superfície exterior e Γ_d corresponde ao plano da descontinuidade, definindo dois subdomínios: Ω^+ e Ω^- . Assume-se que o carregamento é aplicado de forma estática, incluindo forças de volume \bar{b} e condições de fronteira \bar{t} e \bar{u} , as quais são aplicadas, respetivamente, nas superfícies Γ_t e Γ_u . O vetor n é definido como ortogonal à superfície fronteira, apontando para o seu exterior, enquanto n^+ corresponde ao vetor normal ao plano de descontinuidade, apontando para o interior de Ω^+ .

O campo de deslocamentos totais, u , resulta da soma de duas contribuições: (i) o campo regular de deslocamentos, \hat{u} ; e (ii) o campo de deslocamentos exclusivamente devido à abertura da descontinuidade, \tilde{u} , i.e.:

$$u(x) = \hat{u}(x) + \mathcal{H}_{\Gamma_d} \tilde{u}(x) \quad (1)$$

onde \mathcal{H}_{Γ_d} é a função de Heaviside, assumindo 0 ou 1, consoante se esteja em Ω^- ou Ω^+ , respetivamente.

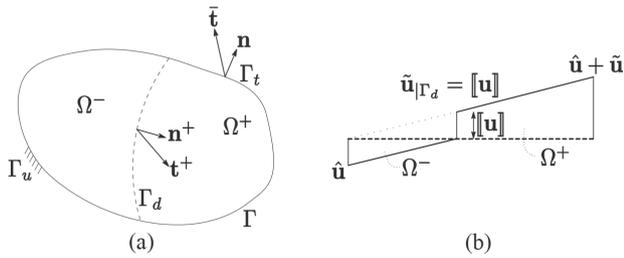


Figura 1 (a) Domínio Ω atravessado por uma descontinuidade forte Γ_d ; e (b) Representação do deslocamento ao longo de um corte intersectando a descontinuidade

A abertura da descontinuidade, $[[\mathbf{u}]]$ (ver Figura 1(b)), é obtida aplicando diretamente a Equação (1) a ambos os subdomínios:

$$[[\mathbf{u}]] = (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-)|_{\Gamma_d} = \tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma_d} \quad (2)$$

Considerando a hipótese de pequenos deslocamentos, o campo de extensões é dado pela equação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} = \nabla^s \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{H}_{\Gamma_d} \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} + \delta_{\Gamma_d} ([[\mathbf{u}]] \otimes \mathbf{n}^+)^s \quad \text{em } \Omega \quad (3)$$

onde $(\cdot)^s$ corresponde à parte simétrica de (\cdot) e \otimes corresponde ao produto diádico.

O equilíbrio do domínio pode ser descrito pelo princípio dos trabalhos virtuais, o qual tem a seguinte forma no caso da presença de descontinuidades [1, 4-6]:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega \setminus \Gamma_d} (\nabla \cdot \delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega - \int_{\Gamma_d} \delta [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{t}^+ d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega \setminus \Gamma_d} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

A Equação (4) é semelhante ao princípio clássico dos trabalhos virtuais, tendo apenas um segundo termo (adicional), que representa o trabalho realizado pela descontinuidade.

3 Formulação do elemento finito enriquecido

Nesta secção são apresentadas as equações discretizadas para um elemento finito com descontinuidade embebida, bem como o procedimento adotado para transmissão da abertura da descontinuidade.

3.1 Discretização da formulação

O domínio Ω representado na Figura 1 pode ser discretizado em múltiplos elementos finitos. Na Figura 2 apresenta-se um desses elementos, com domínio Ω^e , contendo uma descontinuidade, Γ_d^e . A descontinuidade é assumida planar e definida pelos nós i, j, k e l , sobre as arestas do elemento.

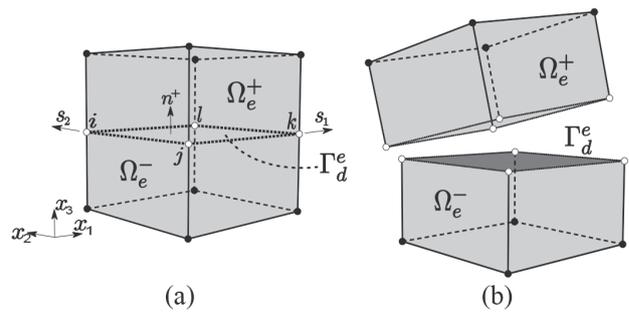


Figura 2 Domínio Ω^e atravessado por uma descontinuidade forte Γ_d^e ; (a) configuração indeformada; e (b) possível configuração deformada

Os deslocamentos do elemento são calculados resolvendo as Equações (1) e (2) da seguinte forma:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \left[\mathbf{a}^e + (\mathcal{H}_{\Gamma_d^e} \mathbf{I} - \mathbf{H}_{\Gamma_d^e}^e) \tilde{\mathbf{a}}^e \right] \quad \text{se } \mathbf{x} \in \Omega^e \setminus \Gamma_d^e \quad (5)$$

$$[[\mathbf{u}]]^e = \mathbf{u}^{e+} - \mathbf{u}^{e-} = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{a}}^e \quad \text{em } \Gamma_d^e \quad (6)$$

onde \mathbf{N}^e corresponde à matriz das funções de forma do elemento, \mathbf{a}^e contém os deslocamentos totais nodais, $\tilde{\mathbf{a}}^e$ representa os deslocamentos nodais devidos exclusivamente à abertura da descontinuidade, \mathbf{I} é a matriz identidade e $\mathbf{H}_{\Gamma_d^e}^e$ é uma matriz diagonal obtida pelo cálculo da função de Heaviside para cada um dos graus de liberdade de cada nó do elemento. Os deslocamentos nodais devidos à abertura da descontinuidade podem ser escritos da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{a}}^e = \mathbf{M}_w^{ek} \mathbf{w}^e \quad (7)$$

onde \mathbf{w}^e é um vetor contendo a abertura da descontinuidade em cada um dos n_w nós adicionais que a definem e \mathbf{M}_w^{ek} é a matriz de transmissão da abertura da descontinuidade aos nós do elemento finito, que se encontra detalhada na secção 3.2.

O campo de extensões do elemento finito é obtido mediante derivação da Equação (5):

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B}^e(\mathbf{x}) \left[\mathbf{a}^e + (\mathcal{H}_{\Gamma_d^e} \mathbf{I} - \mathbf{H}_{\Gamma_d^e}^e) \tilde{\mathbf{a}}^e \right] \quad \text{se } \mathbf{x} \in \Omega^e \setminus \Gamma_d^e \quad (8)$$

com

$$\mathbf{B}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{L}^e \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \quad (9)$$

sendo \mathbf{L}^e o operador diferencial. Assim sendo, pode determinar-se a tensão no domínio, de forma incremental, utilizando a seguinte equação:

$$d\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e(\mathbf{x}) \left[d\mathbf{a}^e + (\mathcal{H}_{\Gamma_d^e} \mathbf{I} - \mathbf{H}_{\Gamma_d^e}^e) d\tilde{\mathbf{a}}^e \right] \quad \text{se } \mathbf{x} \in \Omega^e \setminus \Gamma_d^e \quad (10)$$

enquanto a tensão na descontinuidade é dada por:

$$d\mathbf{t}^e = \mathbf{T}^e d[[\mathbf{u}]]^e = \mathbf{T}^e \mathbf{N}_w^e d\mathbf{w}^e \quad \text{em } \Gamma_d^e \quad (11)$$

onde \mathbf{D}^e e \mathbf{T}^e são as matrizes de rigidez tangente do contínuo e da descontinuidade, respetivamente.

As Equações (5) a (11) podem ser utilizadas para discretizar a Equação (4), obtendo-se o seguinte sistema de equações:

$$K_{aa}^e da^e - K_{aw}^e dw^e = d\hat{f}^e \quad (12)$$

$$-K_{wa}^e da^e + (K_{ww}^e + K_d^e)dw^e = d\tilde{f}^e \quad (13)$$

onde:

$$K_{aa}^e = \int_{\Omega^e \setminus \Gamma_d^e} B^{eT} D^e B^e d\Omega \quad (14)$$

$$K_{aw}^e = \int_{\Omega^e \setminus \Gamma_d^e} B^{eT} D^e B_w^e d\Omega \quad (15)$$

$$K_{wa}^e = \int_{\Omega^e \setminus \Gamma_d^e} B_w^{eT} D^e B^e d\Omega \quad (16)$$

$$K_{ww}^e = \int_{\Omega^e \setminus \Gamma_d^e} B_w^{eT} D^e B_w^e d\Omega \quad (17)$$

$$K_d^e = \int_{\Gamma_d^e} N_w^{eT} T^e N_w^e d\Gamma \quad (18)$$

com

$$B_w^e = B^e H_{\Gamma_d^e}^e M_w^{ek} \quad (19)$$

sendo as forças obtidas de acordo com as seguintes equações:

$$d\hat{f}^e = \int_{\Omega^e \setminus \Gamma_d^e} N^{eT} d\bar{b}^e d\Omega + \int_{\Gamma_f^e} N^{eT} d\bar{t}^e d\Gamma \quad (20)$$

$$d\tilde{f}^e = d\hat{f}_w^e - (H_{\Gamma_d^e}^e M_w^{ek})^T d\hat{f}^e \quad (21)$$

$$d\hat{f}_w^e = \int_{\Omega^e \setminus \Gamma_d^e} M_w^{ekT} H_{\Gamma_d^e}^{eT} N^{eT} d\bar{b}^e d\Omega + \int_{\Gamma_f^e} M_w^{ekT} H_{\Gamma_d^e}^{eT} N^{eT} d\bar{t}^e d\Gamma \quad (22)$$

Uma vez que a formulação foi deduzida diretamente do princípio variacional representado na Equação (4), existe consistência variacional e a simetria do sistema de equações está garantida sempre que sejam adotadas leis constitutivas simétricas.

3.2 Transmissão dos saltos das descontinuidades

Nesta secção é abordada a forma de transmissão da abertura da descontinuidade para os nós do elemento finito enriquecido. Assume-se que a abertura da descontinuidade ocorre mediante um movimento de corpo rígido, utilizando-se esta hipótese para se obter os deslocamentos nos restantes nós do elemento. Assim sendo, utiliza-se a matriz de transmissão M_w^{ek} (ver Equação (7)), a qual incorpora a possibilidade de translação e de rotação de Ω^{e+} em relação a Ω^{e-} . Esta matriz resulta da avaliação da matriz M_w^e para cada um dos nós do elemento finito e posterior acoplamento.

A matriz M_w^e pode ser obtida através da rotação da matriz M_w^e , que corresponde à matriz de transmissão definida segundo o referencial local da descontinuidade. A descontinuidade pode ser formada por 3 ou 4 nós, conduzindo a matrizes M_w^e diferentes (ver Equações (23) e (24), respetivamente):

$$M_w^{eT} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{0,5\Delta x_2'}{l_{x_1}'} & \frac{0,5\Delta x_1'}{l_{x_1}'} & 0 \\ \frac{\Delta x_2'}{l_{x_2}'} & 1 - \frac{\Delta x_1'}{l_{x_2}'} & 0 \\ \frac{\Delta x_3'}{l_{x_2}'} & \frac{0,5\Delta x_3'}{l_{x_1}'} & 1 - \frac{\Delta x_1'}{l_{x_2}'} - \frac{0,5\Delta x_2'}{l_{x_1}'} \\ -\frac{0,5\Delta x_2'}{l_{x_1}'} & \frac{0,5\Delta x_1'}{l_{x_1}'} & 0 \\ \frac{0,5\Delta x_2'}{l_{x_2}'} & \frac{0,5\Delta x_1'}{l_{x_2}'} & 0 \\ \frac{0,5\Delta x_3'}{l_{x_2}'} & \frac{0,5\Delta x_3'}{l_{x_1}'} & \frac{0,5\Delta x_1'}{l_{x_2}'} - \frac{0,5\Delta x_2'}{l_{x_1}'} \\ \frac{\Delta x_2'}{l_{x_1}'} & -\frac{\Delta x_1'}{l_{x_1}'} & 0 \\ -\frac{0,5\Delta x_2'}{l_{x_2}'} & \frac{0,5\Delta x_1'}{l_{x_2}'} & 0 \\ \frac{0,5\Delta x_3'}{l_{x_2}'} & -\frac{\Delta x_3'}{l_{x_1}'} & \frac{0,5\Delta x_1'}{l_{x_2}'} + \frac{\Delta x_2'}{l_{x_1}'} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$M_w^{eT} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{0,5\Delta x_2'}{l_{x_1}'} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{0,5\Delta x_1'}{l_{x_2}'} & 0 \\ \frac{0,5\Delta x_3'}{l_{x_2}'} & \frac{0,5\Delta x_3'}{l_{x_1}'} & 1 - \frac{0,5\Delta x_1'}{l_{x_2}'} - \frac{0,5\Delta x_2'}{l_{x_1}'} \\ -\frac{0,5\Delta x_2'}{l_{x_1}'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{0,5\Delta x_1'}{l_{x_2}'} & 0 \\ \frac{(1-\lambda_{x_2})\Delta x_3'}{l_{x_2}'} & \frac{0,5\Delta x_3'}{l_{x_1}'} & \frac{(1-\lambda_{x_2})\Delta x_1'}{l_{x_2}'} - \frac{0,5\Delta x_2'}{l_{x_1}'} \\ \frac{0,5\Delta x_2'}{l_{x_1}'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{0,5\Delta x_1'}{l_{x_2}'} & 0 \\ -\frac{\lambda_{x_2}\Delta x_3'}{l_{x_2}'} & -\frac{\lambda_{x_1}\Delta x_3'}{l_{x_1}'} & \frac{\lambda_{x_2}\Delta x_1'}{l_{x_2}'} + \frac{\lambda_{x_1}\Delta x_2'}{l_{x_1}'} \\ \frac{0,5\Delta x_2'}{l_{x_1}'} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{0,5\Delta x_1'}{l_{x_2}'} & 0 \\ \frac{0,5\Delta x_3'}{l_{x_2}'} & \frac{(1-\lambda_{x_1})\Delta x_3'}{l_{x_1}'} & \frac{0,5\Delta x_1'}{l_{x_2}'} + \frac{(1-\lambda_{x_1})\Delta x_2'}{l_{x_1}'} \end{bmatrix} \quad (24)$$

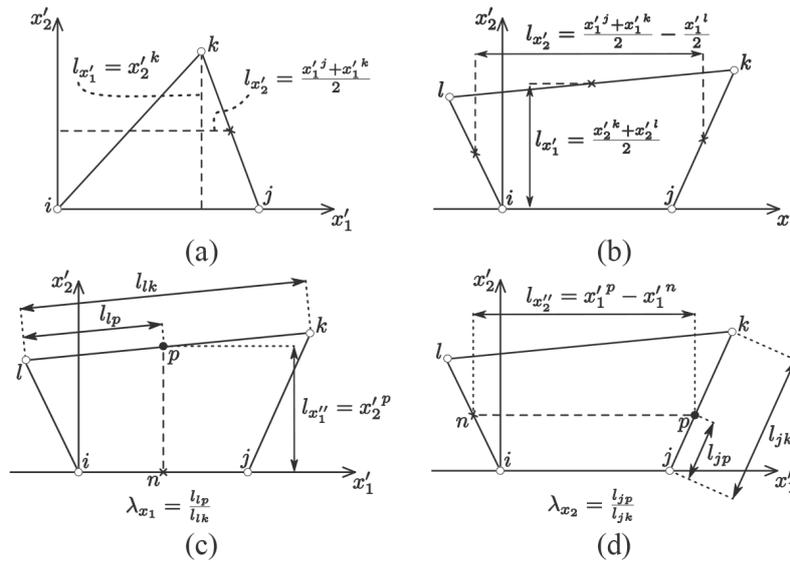


Figura 3 Determinação de: (a) $l_{x'_1}$ e $l_{x'_2}$ para descontinuidades de 3 nós; (b) $l_{x'_1}$ e $l_{x'_2}$ para descontinuidades de 4 nós; (c) $l_{x'_1}$ e $\lambda_{x'_1}$ para descontinuidades de 4 nós; e (d) $l_{x'_2}$ e $\lambda_{x'_2}$ para descontinuidades de 4 nós

onde $\Delta x'_1 = x'_1 - x_1^i$, $\Delta x'_2 = x'_2 - x_2^i$, $\Delta x'_3 = x'_3 - x_3^i$ e $l_{x'_1}$, $l_{x'_2}$, $l_{x'_3}$, $l_{x'_4}$, $\lambda_{x'_1}$ e $\lambda_{x'_2}$ são definidos de acordo com a Figura 3. Na Figura 3(a) é representada uma descontinuidade de 3 nós, no seu sistema de eixos local, de forma a ilustrar a determinação de $l_{x'_1}$ e $l_{x'_2}$, enquanto na Figura 3(b) a 3(d) é representada a forma de determinar $l_{x'_1}$, $l_{x'_2}$, $l_{x'_3}$, $l_{x'_4}$, $\lambda_{x'_1}$ e $\lambda_{x'_2}$ para uma descontinuidade de 4 nós.

Como foi atrás referido, a matriz M_w^e é obtida através da rotação da matriz M_w^g para o referencial global, da seguinte forma:

$$M_w^e = A^T M_w^g A \quad (25)$$

onde A corresponde à matriz de rotação para o caso tridimensional e l_w é uma matriz identidade cuja diagonal principal é formada por n_w submatrizes A , de acordo com a seguinte equação:

$$l_w = \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A \end{bmatrix} \quad (26)$$

4 Resultados

Nesta secção apresentam-se dois exemplos para testar a formulação desenvolvida. Na secção 4.1, utiliza-se um exemplo de uma viga de betão submetida a flexão em três pontos, enquanto na secção 4.2 se simula uma viga testada experimentalmente por Gálvez *et al.* [7]. Refere-se que se adotou a regra de Newton-Cotes/Lobatto com quatro pontos de integração para o cálculo da rigidez da descontinuidade (Equação (18)) e uma quadratura de Gauss com dois pontos para os restantes termos de rigidez relacionados com o domínio do elemento (Equações (14) a (17)).

4.1 Viga submetida a flexão em três pontos

Nesta secção foi simulado o ensaio experimental realizado por Petersson [8], de forma a permitir a comparação com o resultado obtido por Dias-da-Costa *et al.* [3] com a formulação DSDA desenvolvida para o caso bidimensional. O ensaio consistiu numa viga de betão submetida a flexão em três pontos, com um vão de 2000 mm e um entalhe ($10 \times 100 \text{ mm}^2$) localizado na zona de meio-vão da viga, na parte inferior da secção transversal ($50 \times 200 \text{ mm}^2$) – ver Figura 4.

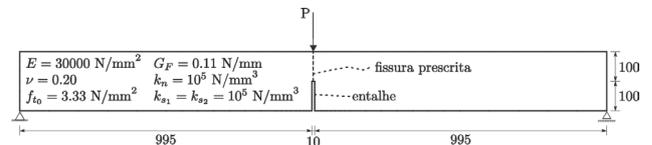


Figura 4 Viga submetida a flexão em três pontos – esquema estrutural do ensaio (50 mm de profundidade, dimensões em mm)

Foram utilizadas as seguintes propriedades para o betão da viga simulada: módulo de Young $E = 30\,000 \text{ N/mm}^2$; coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$; resistência à tração $f_{t0} = 3,33 \text{ N/mm}^2$; energia de fratura $G_F = 0,11 \text{ N/mm}$; e rigidez normal e de corte para ambas as direções iguais a 10^5 N/mm^3 . Tal como efetuado por Dias-da-Costa *et al.* [3], a descontinuidade foi prescrita *a priori* na malha de elementos finitos, conforme ilustrado na Figura 4, de forma a garantir uma correta comparação com a formulação bidimensional. Considerou-se ainda que a descontinuidade prescrita evoluía em modo-I de fratura e de acordo com uma lei de amolecimento exponencial.

A malha de elementos finitos utilizada (ver Figura 5) para simular o ensaio acima descrito é formada por 1266 elementos finitos

hexaédricos, compostos por 1928 nós. Tal como na simulação efetuada por Dias-da-Costa *et al.* [3], foi utilizado, por questões de convergência, o método *arc-length* com constrangimento, garantindo assim um aumento monotónico do deslocamento vertical num dos nós de carregamento.

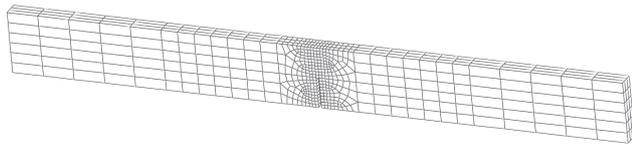


Figura 5 Viga submetida a flexão em três pontos – malha adotada para a simulação

Na Figura 6 encontra-se representada a configuração deformada, para um deslocamento vertical de 1,8 mm, obtida utilizando a formulação 3D-DSDA, enquanto na Figura 7 se encontra apresentada a comparação entre a resposta obtida e as correspondentes respostas experimental e numérica utilizando a formulação 2D-DSDA.

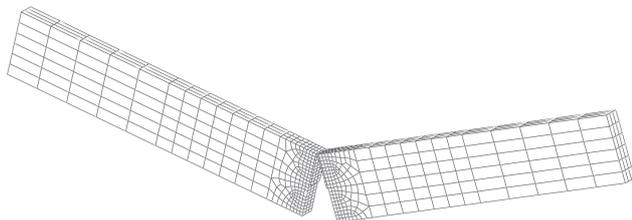


Figura 6 Viga submetida a flexão em três pontos – configuração deformada para um deslocamento vertical de 1,8 mm

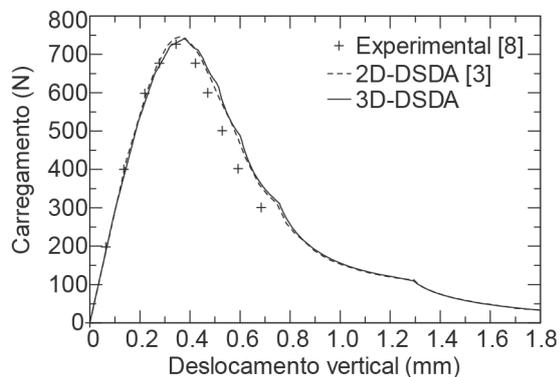


Figura 7 Viga submetida a flexão em três pontos – comparação do resultado obtido com as respostas experimental e numérica utilizando a formulação bidimensional

A conclusão mais importante a retirar é a semelhança existente entre a curva carga vs. deslocamento obtida com a formulação acima descrita e os resultados obtidos experimentalmente por Petersson [8]. Deve ainda realçar-se o facto de a curva obtida ser praticamente coincidente com a correspondente à formulação bidimensional, validando assim o resultado obtido com a formulação aqui desenvolvida.

4.2 Viga com fissura inclinada

Nesta secção são apresentados os resultados da simulação de um estudo experimental realizado por Gálvez *et al.* [7], sendo também os resultados obtidos comparados com os obtidos por Dias-da-Costa *et al.* [3], que utilizou a formulação bidimensional de descontinuidades fortes embebidas. Este ensaio consiste numa viga de betão com comprimento de 675 mm e um entalhe ($3 \times 75 \text{ mm}^2$) localizado na zona de meio-vão da viga, na parte inferior da secção transversal ($50 \times 150 \text{ mm}^2$) – ver Figura 8.

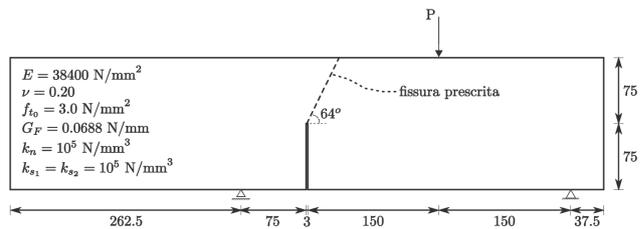


Figura 8 Viga com fissura inclinada – esquema estrutural do ensaio (50 mm de profundidade, dimensões em mm)

De acordo com [7], as propriedades do betão são as seguintes: módulo de Young $E = 38\,400 \text{ N/mm}^2$; coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$; resistência à tração $f_{t0} = 3,0 \text{ N/mm}^2$; energia de fratura $G_f = 0,0688 \text{ N/mm}$; e rigidez normal e de corte para ambas as direções iguais a 10^5 N/mm^3 . Também neste exemplo a fissura foi prescrita, inclinada e fazendo um ângulo de 64° com a horizontal, de forma a permitir uma correta comparação com os resultados obtidos por Dias-da-Costa *et al.* [3], bem como com os resultados de uma simulação numérica efetuada pelo autor do trabalho experimental. Considerou-se ainda que a descontinuidade prescrita evoluiu em modo-I de fratura e de acordo com uma lei de amolecimento exponencial.

A malha de elementos finitos utilizada (ver Figura 9) para simular o ensaio acima descrito é formada por 1101 elementos finitos hexaédricos, compostos por 1636 nós. Tal como na simulação efetuada por Dias-da-Costa *et al.* [3], foi utilizado, por questões de convergência, o método *arc-length* com constrangimento, garantindo assim um aumento monotónico da abertura da descontinuidade.

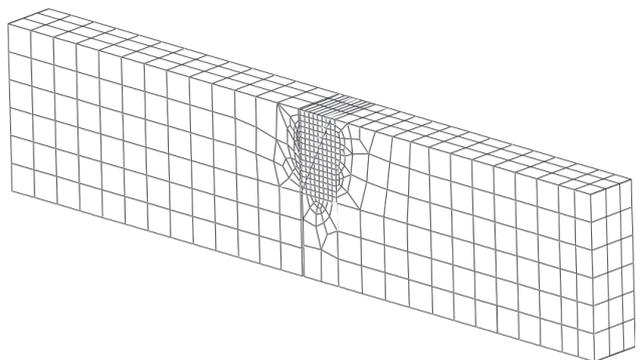


Figura 9 Viga com fissura inclinada – malha adotada para a simulação

Na Figura 10 encontra-se representada a configuração deformada, para uma abertura da descontinuidade de 0,5 mm, obtida utilizando a formulação 3D-DSDA, enquanto na Figura 11 se encontra apresentada a comparação entre a resposta obtida e as correspondentes respostas experimental e numérica utilizando a formulação 2D-DSDA.

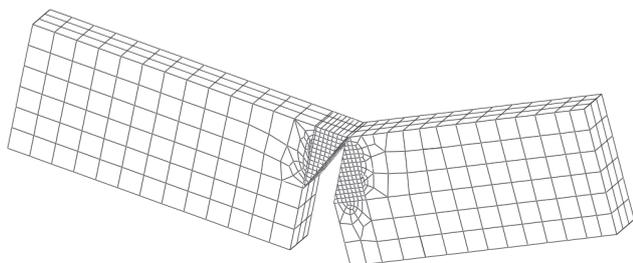


Figura 10 Viga com fissura inclinada – configuração deformada para uma abertura de 0,5 mm

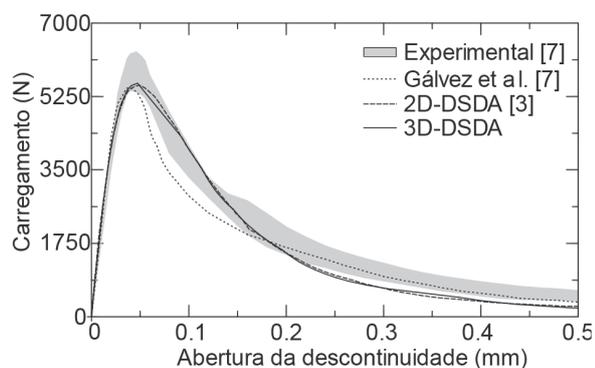


Figura 11 Viga com fissura inclinada – comparação do resultado obtido com as respostas experimental e numéricas [3, 7]

Da análise numérica efetuada deve destacar-se a semelhança existente entre a curva carga vs. abertura da descontinuidade obtida com a formulação 3D-DSDA e os resultados numéricos obtidos por Dias-da-Costa *et al.* [3] e por Gálvez *et al.* [7]. Deve referir-se também a proximidade existente entre os resultados obtidos e os resultados dos ensaios experimentais.

5 Conclusões

Nesta secção foi apresentada uma formulação inovadora que permite a simulação de problemas tridimensionais considerando descontinuidades fortes embebidas. Esta abordagem possui diversas vantagens, nomeadamente no que diz respeito à simplicidade das equações obtidas, que evitam integrações em subdomínios, bem como ao reduzido número de graus de liberdade adicionais necessários na sua implementação, comparando com outras abordagens. Estes graus de liberdade adicionais são também globais, assegurando assim continuidade de tensões nas descontinuidades, ao longo das fronteiras entre elementos, algo que não é habitualmente conseguido noutras abordagens de enriquecimento elementar. Tal como foi descrito acima, a transmissão da abertura

das descontinuidades aos vários nós dos elementos finitos que as contém é feita mediante movimento de corpo rígido.

Os exemplos apresentados, embora sejam simples, permitem a comparação entre a resposta obtida com a formulação desenvolvida e os resultados experimentais e numéricos, obtidos com uma formulação bidimensional de descontinuidades fortes embebidas. Os dois casos estudados são problemas que podem ser analisados bidimensionalmente, pelo que se fez a comparação dos resultados obtidos com a formulação tridimensional (3D-DSDA) com os resultados obtidos com a formulação 2D-DSDA. Por outro lado, os resultados obtidos podem ser comparados com os obtidos experimentalmente por Petersson [8] e Gálvez *et al.* [7], respetivamente. Verificou-se, em ambos os casos, uma boa concordância entre o resultado da formulação 3D-DSDA e o resultado experimental, tanto em termos da fase elástica, como da carga de pico e do comportamento pós-pico.

Neste momento estão a ser modelados outros ensaios com vista a uma completa validação da formulação desenvolvida para um conjunto mais alargado de testes.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pela Bolsa de Doutoramento concedida pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia – FCT, com a referência SFRH/BD/85922/2012, por Fundos FEDER através do Programa Operacional Fatores de Competitividade – COMPETE e por Fundos Nacionais através da FCT no âmbito do projeto No. FCOMP-01-0124-FEDER-020275 (ref. FCT PTDC/ECM/119214/2010).

Referências

- [1] Dias-da-Costa, D.; Alfaiate, J.; Sluys, L.J.; Júlio, E. – "A discrete strong discontinuity approach", *Eng. Fract. Mech.* 76 (2009) 1176-1201. doi:10.1016/j.engfracmech.2009.01.011.
- [2] Dias-da-Costa, D. – *Strong Discontinuities in the scope of the Discrete Crack Approach*, Universidade de Coimbra, 2010.
- [3] Dias-da-Costa, D.; Alfaiate, J.; Sluys, L.J.; Júlio, E. – "A comparative study on the modelling of discontinuous fracture by means of enriched nodal and element techniques and interface elements", *Int. J. Fract.* 161 (2010) 97-119. doi:10.1007/s10704-009-9432-6.
- [4] Malvern, L.E. – *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, Prentice-Hall International, 1969.
- [5] Dias-da-Costa, D.; Alfaiate, J.; Sluys, L.J.; Júlio, E. – "Towards a generalization of a discrete strong discontinuity approach", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 198 (2009) 3670-3681. doi:10.1016/j.cma.2009.07.013.
- [6] Dias-da-Costa, D.; Alfaiate, J.; Sluys, L.J.; Areias, P.; Júlio, E. – "An embedded formulation with conforming finite elements to capture strong discontinuities", *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 93 (2013) 224-244. doi:10.1002/nme.4393.
- [7] Gálvez, J.C.; Elices, M.; Guinea, G.V.; Planas, J. – "Mixed Mode Fracture of Concrete under Proportional and Nonproportional Loading", *Int. J. Fract.* 94 (1998) 267-284. doi:10.1023/A:1007578814070.
- [8] Petersson, P.E. – *Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials*, Lund Institute of Technology, 1981.

