

# Projeto ótimo de pilares geométricos em concreto de alta resistência segundo ABNT NBR 6118:2014

Optimum design of high strength concrete columns according to ABNT NBR 6118:2014

Elcio Cassimiro Alves  
Paula Mayer dos Santos de Souza

## Resumo

O dimensionamento de pilares de concreto armado é, em geral, baseado na experiência do projetista, que analisa as cargas a que estão submetidos e define uma seção que seja capaz de resistir aos esforços solicitantes e de atender às especificações da normalização vigente. Este artigo objetiva apresentar a formulação e os critérios definidos pela ABNT NBR 6118:2014 para o dimensionamento de pilares de concreto armado, retangulares e circulares, com resistências acima de 50 MPa e definir a geometria otimizada, a mais econômica, entre as inúmeras capazes de resistir ao carregamento existente. A otimização foi realizada no software Matlab, pelo método dos pontos interiores. Serão analisados exemplos numéricos de modo a verificar a viabilidade da utilização de pilares com concreto de alta resistência na obtenção da seção mais econômica. Dessa forma, percebeu-se que pilares com essa resistência são indicados quando há imposição de dimensões ou necessidade de redução de seções.

## Abstract

The design of reinforced concrete columns is generally based on the experience of the designer, who analyzes the loads to which they are subjected and defines a section that is capable of resisting the requesting loads and of meeting the specifications of the current normalization. This article aims to present the formulation and the criteria defined by ABNT NBR 6118: 2014 for the design of reinforced concrete, having rectangular or circular cross section, with strength above 50 MPa and to define the optimized geometry, the most economical among the many capable of resisting to the existing load. The optimization was performed in the Matlab software, using the interior points method. Numerical examples will be analyzed in order to verify the viability of the use of columns with high strength concrete in obtaining the most economical section. In this way, it was realized that columns with this resistance are indicated when there is imposition of dimensions or need to reduce sections.

Palavras-chave: Pilares / Ótimo / Concreto / Alta resistência

Keywords: Columns / Optimum / Concrete / High strength

## Elcio Cassimiro Alves

Doutor, Engenharia e Tecnologias Espaciais  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Vitória – ES – Brasil  
elcio.calves1@gmail.com

## Paula Mayer dos Santos de Souza

Mestranda em Engenharia Civil  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Vitória – ES – Brasil  
pmssouza@gmail.com

### Aviso legal

As opiniões manifestadas na Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

### Legal notice

*The views expressed in the Portuguese Journal of Structural Engineering are the sole responsibility of the authors.*

ALVES, Elcio – Projeto ótimo de pilares geométricos em concreto de alta resistência segundo ABNT NBR 6118:2014 **Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas**. Ed. LNEC. Série III. n.º 6. ISSN 2183--8488. (março 2018) 53-66.

## 1 Introdução

O dimensionamento de estruturas de concreto armado é, em geral, baseado na experiência do projetista, que faz o lançamento inicial dos pilares, analisa as cargas a que estão submetidos e então atualiza as dimensões de modo que a seção seja capaz de resistir aos esforços solicitantes e de atender às especificações da normalização vigente.

Os avanços tecnológicos e as pesquisas possibilitaram a obtenção de concretos com resistência característica elevada. Assim, foram necessárias adaptações às normalizações vigentes de modo que definissem critérios para a utilização e o dimensionamento de estruturas com esses concretos de elevada resistência.

Técnicas de otimização podem ser inseridas em programas computacionais que realizam cálculos iterativos, que atualizam os valores das variáveis até encontrar o custo mínimo para o pilar. Neste cálculo devem ser verificados os critérios e exigências definidos pelas normas de dimensionamento a fim de que seja definida uma estrutura segura. Este artigo está baseado na normalização atual que determina os procedimentos para o projeto de estruturas de concreto, a ABNT NBR 6118:2014. Assim, utiliza as propriedades dos materiais, as hipóteses básicas do dimensionamento, as restrições (valores máximos e mínimos exigidos) e o método do pilar-padrão com curvatura aproximada para o cálculo dos efeitos de segunda ordem, conforme definidos pela norma para o dimensionamento dos pilares.

O dimensionamento de pilares vem sendo estudado ao longo dos anos, bem como a utilização da otimização para esta finalidade. Dentre os trabalhos mais recentes, pode-se destacar Sias e Alves (2014), Sias (2014), Pires e Silva (2014), Moraes (2013), Franco (2010) e Miranda (2008), que apresentam estudos sobre dimensionamento exato e dimensionamento aproximado de pilares de seção retangular levando em consideração os efeitos de segunda ordem. Smaniotto (2005) apresenta um estudo sobre o cálculo automático de pilares submetidos a flexão composta. Rodrigues Júnior (2005) apresenta um estudo sobre análise de sensibilidade e otimização de pilares em edifícios altos, limitando o problema a seções retangulares. Sias e Alves (2014) e (2015) estudam o problema de otimização para pilares com esbeltez menor que 90 e concreto com resistência até 50 MPa para seções retangulares e circulares e apontam a viabilidade na redução de custos quando implementado o problema de otimização. Souza e Alves (2016) abordam o projeto otimizado de pilares de concreto armado considerando concreto de alta resistência e verificaram que o aumento desta resistência pode reduzir o custo final dos pilares. Pires e Silva (2014), entretanto, reuniram os dois temas, abordando o dimensionamento otimizado de pilares esbeltos, porém não levando em consideração a resistência do concreto que é, ainda, um assunto pouco explorado para concretos de até 50 MPa. Alves *et al.* (2017) apresentam um estudo sobre dimensionamento de pilares esbeltos levando em consideração concreto com resistência acima de 50 MPa, apontando a viabilidade da implementação do problema de otimização para pilares esbeltos. Bordignon e Kripka (2012) apresentam um estudo sobre dimensionamento ótimo de pilares sujeitos a flexão composta para concreto até 50 MPa utilizando o método do recozimento simulado e compararam neste estudo a viabilidade de usar métodos discretos de otimização com

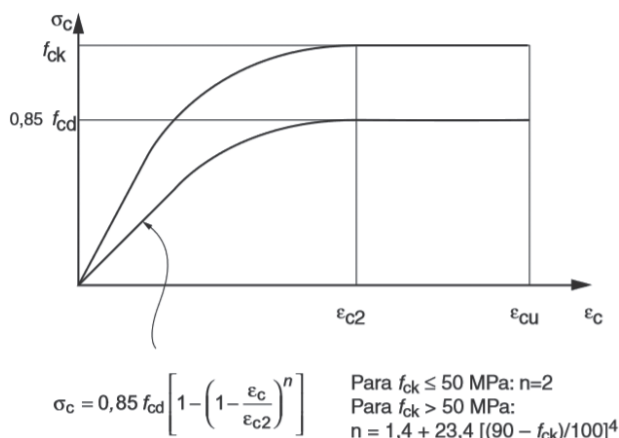
outros métodos. Kripka *et al.* (2016) apresentam um estudo sobre otimização topológica de pórticos de concreto armado limitando as seções e apontam que a solução ótima para os problemas estudados é similar para o problema aplicado na prática.

O presente trabalho tem por objetivo apresentar a formulação do problema de otimização bem como a aplicação desta formulação para pilares geométricos em concreto de alta resistência. A partir dos exemplos analisados pode-se verificar que a formulação do problema de otimização é aplicada para diferentes geometrias e que um dimensionamento com um menor custo pode ser obtido ao aplicar a ferramenta desenvolvida.

O programa foi desenvolvido na plataforma do Matlab 2013, utilizando a ferramenta *Guide*, e o algoritmo de programação quadrática sequencial do pacote da função *fmincon* foi utilizado para obter a solução do problema de otimização implementado.

## 2 Dimensionamento de pilares de concreto armado

Os pilares são elementos fundamentais para as estruturas de concreto armado. A ABNT NBR 6118:2014 não permite o dimensionamento de pilares com carga centrada, portanto, os pilares são dimensionados sempre com carga excêntrica, à flexo-compressão normal ou à flexo-compressão oblíqua, considerando-se ao menos um momento mínimo, estabelecido pela norma. As tensões no concreto se distribuem de acordo com o diagrama mostrado na Figura 1.



**Figura 1** Diagrama tensão-deformação idealizado (ABNT NBR 6118:2014)

Concretos com resistência característica à compressão ( $f_{ck}$ ) entre 50 e 90 MPa, devem ter o valor da tensão de pico ( $\alpha_c \cdot f_{cd} = 0,85 \cdot f_{cd}$ ) substituído por  $0,85 \cdot [1,0 - (f_{ck} - 50) / 200] \cdot f_{cd}$ . Essa tensão de pico é válida para seções em que a largura, medida paralelamente à linha neutra, não diminui a partir desta para a borda mais comprimida, situação abordada neste trabalho. Nos demais casos, esses valores são reduzidos em 90%.

Além disso, os valores dos parâmetros de deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico ( $\epsilon_{c2}$ )

e deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura ( $\epsilon_{cu}$ ) variam de acordo com o  $f_{ck}$  e são definidos:

Para  $f_{ck} \leq 50$  MPa

$$\epsilon_{c2} = 2\text{‰} \quad (1)$$

$$\epsilon_{cu} = 3,5\text{‰} \quad (2)$$

Para  $50 < f_{ck} \leq 90$  MPa

$$\epsilon_{c2} = 2,0\text{‰} + 0,085\text{‰} \cdot (f_{ck} - 50)^{0,53} \quad (3)$$

$$\epsilon_{cu} = 2,6\text{‰} + 0,35\text{‰} \cdot \left( \frac{90 - f_{ck}}{100} \right)^4 \quad (4)$$

### 2.1 Hipóteses básicas do dimensionamento

A ABNT NBR 6118:2014 define as hipóteses básicas para o dimensionamento de pilares de concreto armado em seu item 17.2.2. São elas: as seções transversais permanecem planas após as deformações; o concreto e o aço estão completamente aderidos um ao outro; se despreza a resistência do concreto à tração no Estado Limite Último; as tensões no concreto se distribuem de acordo com o diagrama parábola-retângulo.

### 2.2 Dimensões limites

A ABNT NBR 6118:2014 permite a utilização de pilares com dimensões inferiores a 19 cm, até o mínimo de 14 cm, desde que as ações solicitantes sejam majoradas pelos coeficientes indicados na Tabela I. Além disso, deve-se observar que, segundo a ABNT NBR 6118:2014, a seção de concreto deve possuir área mínima de 360 cm<sup>2</sup>. Outra definição da norma acerca dos pilares é que nos casos em que a maior dimensão excede em 5 vezes a menor dimensão da seção transversal, os mesmos devem ser tratados como pilar-parede.

**Tabela I** Valores do coeficiente adicional  $\gamma_n$  para pilares e pilares-parede

$b$ (cm)	19	18	17	16	15	14
$\gamma_n$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25

Onde  
 $\gamma_n = 1,95 - 0,05 b$   
 $b$  é a menor dimensão da seção transversal, expressa em centímetros (cm).

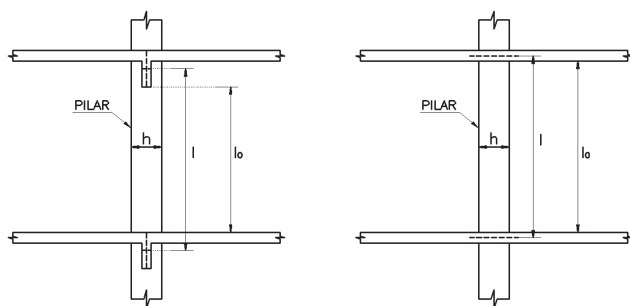
Nota: O coeficiente  $\gamma_n$  deve majorar os esforços solicitantes finais de cálculo quando de seu dimensionamento.

Segundo a ABNT NBR 6118:2014, o comprimento equivalente ( $l_e$ ) de um elemento comprimido suposto vinculado em ambas as extremidades é:

$$l_e = \text{mínimo} (l_0 + h; l) \quad (5)$$

sendo  $l_0$  a distância entre as faces internas dos elementos que vinculam o pilar,  $h$  a altura da seção transversal do pilar medida no plano da estrutura em estudo e  $l$  a distância entre eixos dos elementos que vinculam o pilar.

A Figura 2 visa esclarecer essas definições. Na Figura 2a tem-se um pilar vinculado por vigas e na Figura 2b um pilar vinculado por lajes.



**Figura 2** Definição do comprimento equivalente de um elemento comprimido (Carvalho e Pinheiro, 2005).  
 Nota: Figura 2a – Pilar vinculado por vigas; Figura 2b – Pilar vinculado por lajes

O índice de esbeltez ( $\lambda$ ) do pilar é calculado em função de sua geometria e do comprimento equivalente do elemento comprimido ( $l_e$ ), e deve ser definido para cada direção principal e central de inércia por:

$$\lambda_x = l_{e,x} / i_y \text{ e } \lambda_y = l_{e,y} / i_x \quad (6)$$

em que  $i$  é o raio de giração em  $x$  ( $i_x$ ) e em  $y$  ( $i_y$ ) definidos pela raiz quadrada da razão entre o momento de inércia ( $I_x$  ou  $I_y$ ) e a área da seção transversal ( $A_c$ ), conforme:

$$i_y = \sqrt{I_y / A_c} \text{ e } i_x = \sqrt{I_x / A_c} \quad (7)$$

Em função do índice de esbeltez, da geometria da seção e da disposição das armaduras, a ABNT NBR 6118:2014 define os métodos de determinação dos efeitos locais de segunda ordem, conforme será mostrado no item 2.4. A norma não admite pilares com índice de esbeltez superior a 200.

### 2.3 Momentos mínimos

A ABNT NBR 6118 (2014, p.130) explica a necessidade de consideração de um momento mínimo devido as imperfeições globais que estão relacionadas ao desaprumo da edificação, enquanto as imperfeições locais consideram a falta de retilidade do pilar em questão. Para combater esses efeitos locais a ABNT NBR 6118:2014 recomenda, no item 11.3.3.4.3, que seja calculado um momento mínimo de 1.ª ordem ( $M_{1d,min}$ ), dado pela equação (8). Nesta equação,  $N_d$  é a força normal solicitante de cálculo e  $h$  é a altura total da seção transversal na direção considerada, em metros.

$$M_{1d,min} = N_d \cdot (0,015 + 0,03 \cdot h) \quad (8)$$

Nas estruturas reticuladas usuais, considera-se este efeito atendido se o valor total de momento mínimo for respeitado. Além disso, para os pilares retangulares, tem-se uma envoltória mínima dos momentos de 1.ª ordem, mostrada na figura 11.3 da ABNT NBR 6118:2014. Se for necessário determinar os momentos de 2.ª ordem, a envoltória a ser utilizada é a envoltória mínima com 2.ª ordem, definida na figura 15.2 da referida norma.

### 2.4 Efeitos locais de segunda ordem

A ABNT NBR 6118:2014 permite que os efeitos locais de segunda ordem sejam desprezados quando o índice de esbeltez do elemento comprimido for menor que o índice limite ( $\lambda_1$ ), definido pela equação (9) e limitado em  $35 \leq \lambda_1 \leq 90$ .

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \cdot e_1 / h}{\alpha_b} \quad (9)$$

em que  $e_1/h$  é a excentricidade relativa de 1.ª ordem na extremidade do pilar onde ocorre o momento de 1.ª ordem de maior valor absoluto e  $\alpha_b$  varia de acordo com a vinculação dos extremos do pilar isolado, conforme definido no item 15.8.2 da ABNT NBR 6118:2014.

Para  $\lambda \leq 90$ , pode-se utilizar o método do pilar-padrão com curvatura aproximada ou o método do pilar-padrão com rigidez  $\kappa$  aproximada. Adota-se para  $\lambda < 140$  o método do pilar-padrão acoplado a diagramas  $M, N, 1/r$ . Para índices acima de 140, deve-se utilizar o método geral. E quando  $\lambda \geq 90$  é necessário considerar os efeitos da fluência.

O método do pilar-padrão com curvatura aproximada pode ser empregado em pilares com  $\lambda < 90$ , seção constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo. Por este método o momento total máximo ( $M_{d,tot}$ ) é calculado pela equação (10).

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \cdot \frac{l_e^2}{10 \cdot r} \cdot \frac{1}{r} \geq M_{1d,A} \quad (10)$$

em que  $M_{1d,A}$  é o momento de 1.ª ordem atuante na seção crítica do pilar,  $N_d$  é o esforço normal solicitante de cálculo e  $1/r$  é a curvatura da seção crítica, calculada por:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h \cdot (v + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h} \quad (11)$$

sendo  $h$  a altura da seção na direção considerada e  $v$  a força adimensional, dada por:

$$v = N_d / (A_c \cdot f_{cd}) \quad (12)$$

### 2.5 Dimensionamento segundo a ABNT NBR 6118:2014

A ABNT NBR 6118:2014 impõe alguns limites para as armaduras utilizadas nas seções de pilares de concreto armado. A área de aço longitudinal deve corresponder a, no mínimo, 0,4% da área de concreto e a, no máximo, 8% da mesma (considerando inclusive as regiões de transpasse das armaduras). Além disso, a área de aço deve ser superior a 15% da razão entre o esforço normal solicitante de cálculo ( $N_{sd}$ ) e a resistência de cálculo do aço ao escoamento ( $f_{y,d}$ ). Não é permitido o uso de barras longitudinais com diâmetro inferior a 10 mm nem superior a 1/8 da menor dimensão da seção transversal.

Em seções poligonais, deve-se ter pelo menos 1 barra em cada vértice, e em seções circulares no mínimo 6 barras distribuídas ao longo do perímetro. O espaçamento máximo entre eixos das barras deve ser menor ou igual a duas vezes a menor dimensão da seção transversal, sem exceder 40 cm e o espaçamento mínimo entre

as faces das barras, fora da região de emendas, deve ser igual ou superior ao maior dos valores: 20 mm; diâmetro da barra; e 1,2 vez a dimensão máxima característica do agregado graúdo (Figura 3).

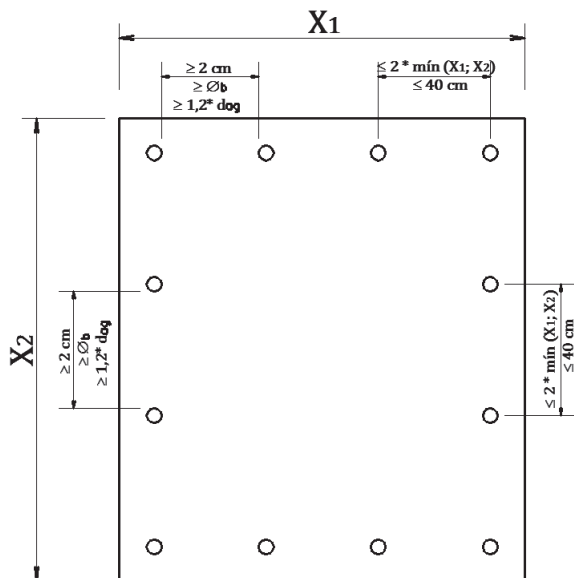


Figura 3 Espaçamentos mínimo e máximo entre barras longitudinais

De acordo com a Figura 3,  $x_1$  é a base do pilar,  $x_2$  é a altura do pilar,  $\phi_b$  é o diâmetro das barras e  $d_{ag}$  a dimensão máxima característica do agregado graúdo.

### 3 Formulação do problema de otimização

Conforme explicado anteriormente, o problema de otimização se baseia em encontrar a solução ótima que maximize ou minimize a função objetivo. No caso do dimensionamento de pilares, a função objetivo é o custo total do pilar (por metro linear), que engloba o custo do concreto, do aço e das formas utilizadas. Assim, a função objetivo a qual deseja-se minimizar pode ser definida por:

$$f_{(min)} = C_c \cdot A_c + C_a \cdot A_a \cdot \rho + C_f \cdot P_f \quad (13)$$

em que  $C_c$  é o custo do concreto (R\$/m<sup>3</sup>);  $A_c$  é a área da seção transversal de concreto (m<sup>2</sup>);  $C_a$  é o custo do aço (R\$/kg);  $A_a$  é a área de aço total na seção transversal de concreto (m<sup>2</sup>);  $\rho$  é o peso específico do aço (kg/m<sup>3</sup>);  $C_f$  é o custo das formas (R\$/m<sup>2</sup>) e  $P_f$  é o perímetro de formas (m), equivalente ao perímetro do pilar.

Os custos dos materiais podem ser observados na Figura 4 do programa desenvolvido.

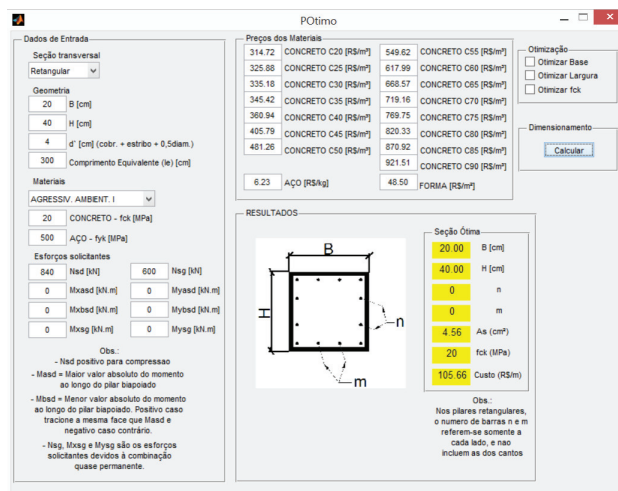


Figura 4 Tela de apresentação dos custos dos materiais para o problema de otimização

A solução ótima para a função objetivo acima definida é dada por meio de cálculos iterativos que alteram os valores das variáveis sucessivamente, até obter o ponto de mínimo. Dessa forma, tem-se, no programa computacional desenvolvido, as seções a seguir indicadas.

#### Seções retangulares

Para seções retangulares, conforme mostrado na Figura 5, as seguintes variáveis:

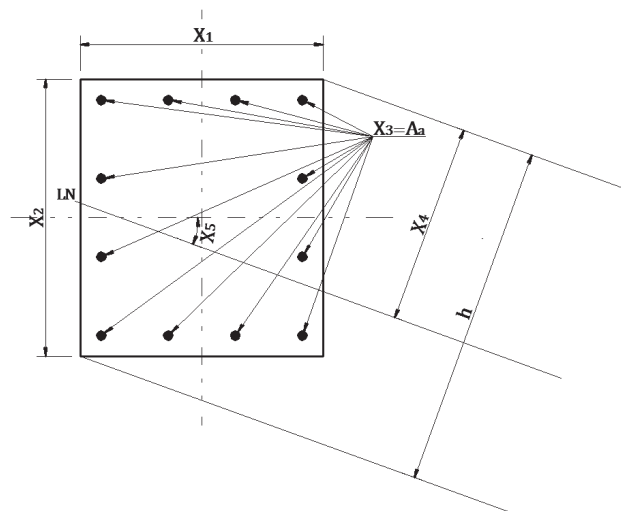


Figura 5 Variáveis adotadas para as seções retangulares

Onde:

$x_1$  é a base da seção;  $x_2$  é a altura da seção;  $x_3 = A_a$  é área de aço total da seção;  $x_4$  é a profundidade da linha neutra;  $x_5$  é o ângulo de inclinação da linha neutra e  $x_6 = f_{ck}$  é a resistência característica do concreto à compressão.

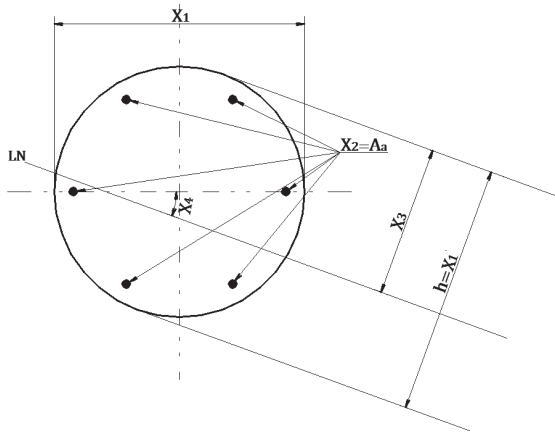
De acordo com as opções de otimização selecionadas no programa  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_6$  podem ser fixas ou ter seus valores alterados.

### Seções circulares

As seções circulares possuem basicamente as mesmas variáveis, porém, ao invés das dimensões dos lados do retângulo, tem-se o diâmetro do pilar.

Sendo  $x_1$  o diâmetro da seção;  $x_2 = A_a$  a área de aço total da seção;  $x_3$  a profundidade da linha neutra;  $x_4$  o ângulo de inclinação da linha neutra e a resistência característica do concreto à compressão ( $x_5 = f_{ck}$ ).

Neste caso, as opções de otimização selecionadas no programa definem se  $x_1$  e  $x_5$  devem ser fixas ou ter seus valores alterados iterativamente. A Figura 6 mostra as variáveis adotadas para as seções circulares.



**Figura 6** Variáveis adotadas para as seções circulares

A solução ótima deve atender às funções de restrições, as quais, em geral, são recomendações e exigências da norma de dimensionamento. As funções de restrições inseridas no programa foram as citadas no item 2.5.

a) Área mínima da seção transversal:

$$A_c \geq 360 \text{ cm}^2 \quad (14)$$

b) Número de barras ( $n_b$ ) mínimo na seção:

b.1) Pilares retangulares:

$$n_b \geq 4 \quad (15)$$

b.2) Pilares circulares:

$$n_b \geq 6 \quad (16)$$

c) Taxas geométricas mínimas e máxima:

$$\text{máximo}(0,004 \cdot A_c; 0,15 \cdot N_{sd} / f_{yd}) \leq A_a \leq 0,04 \cdot A_c \quad (17)$$

d) Espaçamento mínimo e máximo em cada direção:

d.1) Pilares retangulares:

$$2 \text{ cm} \leq S_x = (x_1 - 2 \cdot d') / n_{sx} \leq \text{mínimo} [40 \text{ cm}; 2 \cdot \text{mínimo}(x_1; x_2)] \quad (18)$$

$$2 \text{ cm} \leq S_y = (x_2 - 2 \cdot d') / n_{sy} \leq \text{mínimo} [40 \text{ cm}; 2 \cdot \text{mínimo}(x_1; x_2)] \quad (19)$$

Sendo  $S_x$  e  $S_y$  os espaçamentos entre as barras nas direções  $x$  e  $y$ , base e altura da seção, respectivamente;  $d'$  a distância do eixo das

barras longitudinais à face externa da seção; e  $n_{sx}$  e  $n_{sy}$  os números de espaçamentos entre as barras nas direções  $x$  e  $y$ .

d.2) Pilares circulares:

$$2 \text{ cm} \leq S_b = \pi \cdot (x_1 - 2 \cdot d') / n_b \leq 40 \text{ cm} \quad (20)$$

Em que  $S_b$  é o espaçamento entre as barras, medido radialmente.

e) Diâmetro das barras de aço ( $\phi_b$ ), mínimo e máximo. Foi adotado o valor de 40 mm como limite máximo para o diâmetro da barra devido aos diâmetros comerciais disponíveis.

e.1) Pilares retangulares:

$$10 \text{ mm} \leq \phi_b = \frac{A_a}{n_b} \leq \text{mínimo} \left[ \frac{1}{8} \cdot \text{mínimo}(x_1; x_2); 40 \text{ mm} \right] \quad (21)$$

e.2) Pilares circulares:

$$10 \text{ mm} \leq \phi_b = \frac{A_a}{n_b} \leq \text{mínimo} \left[ \frac{x_1}{8}; 40 \text{ mm} \right] \quad (22)$$

f) Índice de esbeltez ( $\lambda$ ) máximo adotado:

$$\text{máximo}(\lambda_x; \lambda_y) \leq 90 \quad (23)$$

g) Limites impostos pelos domínios de deformação:

g.1) Pilares retangulares:

Domínios 3, 4 e 4a

$$x_4 \leq x_1 \cdot \text{sen}(x_5) + x_2 \cdot \text{cos}(x_5) \leq 10\% \cdot x_4 / \epsilon_{cu} \quad (24)$$

Domínio 5

$$x_4 \geq x_1 \cdot \text{sen}(x_5) + x_2 \cdot \text{cos}(x_5) \quad (25)$$

g.2) Pilares circulares:

Domínios 3, 4 e 4a

$$x_3 \leq x_1 \leq 10\% \cdot x_3 / \epsilon_{cu} \quad (26)$$

Domínio 5

$$x_3 \geq x_1 \quad (27)$$

h) Resistências devem ser superiores às solicitações:

$$N_{Rd} \geq N_{sd} \quad (28)$$

$$M_{x,Rd} \geq M_{x,Sd} \quad (29)$$

$$M_{y,Rd} \geq M_{y,Sd} \quad (30)$$

Sendo

$N_{Rd}$  a força resistente de cálculo da seção transversal;

$M_{x,Rd}$  e  $M_{y,Rd}$  os momentos resistentes de cálculo nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente;

$M_{x,Sd}$  e  $M_{y,Sd}$  os momentos solicitantes de cálculo nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Finalmente, tem-se o espaço de busca, ou região viável, o qual deverá conter a solução ótima, dada para pilares retangulares por:

$$14 \text{ cm} \leq x_1 \leq 300 \text{ cm} \quad (31)$$

$$14 \text{ cm} \leq x_2 \leq 300 \text{ cm} \quad (32)$$

$$\text{máximo}(20 \text{ MPa}; f_{ck,\min}) \leq x_6 \leq 90 \text{ MPa} \quad (33)$$

Sendo  $f_{ck,\min}$  o valor mínimo exigido pela norma para a resistência característica do concreto à compressão em função da classe de agressividade do local da edificação.

E para pilares circulares por:

$$21 \text{ cm} \leq x_1 \leq 300 \text{ cm} \quad (34)$$

$$\text{máximo}(20 \text{ MPa}; f_{ck,\min}) \leq x_5 \leq 90 \text{ MPa} \quad (35)$$

O diâmetro dos pilares circulares possui como limite inferior 21 cm devido à limitação de área mínima de 360 cm<sup>2</sup>, imposta pela ABNT NBR 6118:2014.

### Seções hexagonais

Para seções hexagonais as variáveis de projeto são definidas conforme apresentado na Figura 7.

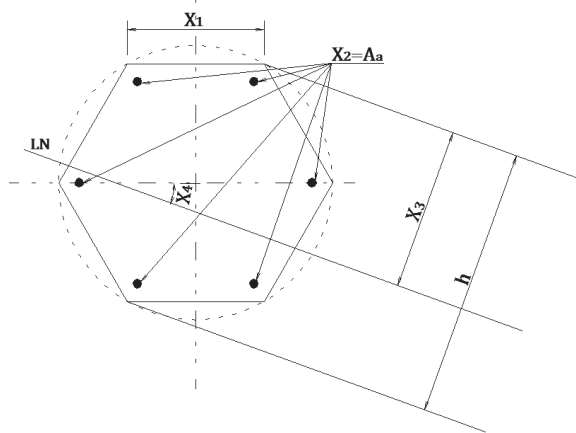


Figura 7 Variáveis adotadas para as seções hexagonais

Sendo o lado da seção ( $x_1$ ); a área de aço total da seção ( $x_2 = A_a$ ); a profundidade da linha neutra ( $x_3$ ); o ângulo de inclinação da linha neutra ( $x_4$ ); e a resistência característica do concreto à compressão ( $x_5 = f_{ck}$ ).

No programa, o usuário define se as variáveis  $x_1$  e  $x_5$  devem ser fixas ou ter seus valores alterados iterativamente.

a) Área mínima da seção transversal:

$$A_c = 6 \cdot x_1^2 \cdot \sqrt{3} / 4 \geq 360 \text{ cm}^2 \quad (36)$$

b) Número de barras ( $n_b$ ) mínimo na seção:

$$n_b \geq 6 \quad (37)$$

c) Taxas geométricas mínimas e máxima:

$$\text{máximo}(0,004 \cdot A_c; 0,15 \cdot N_{sd} / f_{yd}) \leq A_a \leq 0,04 \cdot A_c \quad (38)$$

d) Espaçamento mínimo e máximo:

$$2 \text{ cm} + \phi_b = 2 \text{ cm} + \sqrt{\frac{4 \cdot A_a}{\pi \cdot n_b}} \leq S_b = \frac{(x_1 \cdot \sqrt{3} / 2 - d') \cdot 12}{\sqrt{3} \cdot n_b} \leq 40 \text{ cm} \quad (39)$$

Em que  $S_b$  é o espaçamento entre eixos das barras.

e) Diâmetro das barras de aço ( $\phi_b$ ), mínimo e máximo. Foi adotado o valor de 40 mm como limite máximo para o diâmetro da barra devido aos diâmetros comerciais disponíveis.

$$10 \text{ mm} \leq \phi_b = \sqrt{\frac{4 \cdot A_a}{\pi \cdot n_b}} \leq \text{mínimo} \left[ \frac{x_1}{8}; 40 \text{ mm} \right] \quad (40)$$

f) Índice de esbeltez ( $\lambda$ ) máximo adotado:

$$\text{máximo}(\lambda_x; \lambda_y) \leq 90 \quad (41)$$

g) Limites impostos pelos domínios de deformação:

Domínios 3, 4 e 4a

$$x_3 \leq x_1 \leq 10\% \epsilon_{cu} \cdot x_3 / \epsilon_{cu} \quad (42)$$

Domínio 5

$$x_3 \geq x_1 \quad (43)$$

Finalmente, tem-se o espaço de busca, ou região viável, o qual deverá conter a solução ótima, dada para pilares hexagonais por:

$$8 \text{ cm} \leq x_1 \leq 300 \text{ cm} \quad (44)$$

$$\text{máximo}(29 \text{ MPa}; f_{ck,\min}) \leq x_5 \leq 90 \text{ MPa} \quad (45)$$

Sendo  $f_{ck,\min}$  o valor mínimo exigido pela norma para a resistência característica do concreto à compressão em função da classe de agressividade do local da edificação.

## 4 Exemplos

Os resultados gerados pelo programa foram validados com a literatura e com Sias (2014) nos dois primeiros exemplos que seguem, o primeiro referente à seção retangular e o segundo à seção circular. Em seguida novos exemplos foram desenvolvidos.

Os exemplos foram calculados no programa desenvolvido por três vezes, sendo elas:

- A primeira com a geometria inicial definida (seção original);
- A segunda com a geometria (ou uma das dimensões) liberada para ser otimizada;
- E a terceira com a geometria e o  $f_{ck}$  liberados para a otimização. O comprimento efetivo considerado foi de 300 cm, valor médio para pé-direito de edifícios. Considerou-se também  $d' = 3 \text{ cm}$  e aço CA-50 ( $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ ).

Para a comparação dos custos, os valores utilizados foram baseados na Tabela SINAPI, da Caixa Econômica Federal, de novembro de 2015 e referente à cidade de Vitória – ES. É importante salientar que a definição precisa dos custos dos materiais influencia direta e fortemente os resultados fornecidos pelo programa. Dessa forma, os custos devem ser levantados de forma adequada para não se obter resultados distorcidos.

Para todos os exemplos, o programa de otimização busca qual a melhor combinação entre a geometria da seção, a resistência a compressão do concreto ( $f_{ck}$ ) e a taxa de armadura. Sendo o resultado final a solução ótima dentro do espaço viável de busca.

#### 4.1 Exemplo 1

O primeiro exemplo analisado foi retirado do capítulo 4 de Carvalho e Pinheiro (2005), exemplo 4.11. Trata-se de uma seção retangular, submetida à força normal  $N_{sd} = 1550$  kN, com excentricidades totais  $e_x = 7,5$  cm e  $e_y = 20$  cm, resultando em momento em torno do eixo x de 310 kN.m e em torno do eixo y de 116,25 kN.m. A seção original definida pelos autores possuía 30 cm de base, 60 cm de altura e  $f_{ck} = 20$  MPa como pode ser observado na Figura 8.

Os autores dimensionaram a seção por meio de ábacos. Na primeira tentativa obtiveram área de aço de 48,5 cm<sup>2</sup> e, após fazer um rearranjo das barras longitudinais, a segunda tentativa forneceu uma área de aço de 39,6 cm<sup>2</sup>. Os resultados obtidos para este exemplo tanto pelos autores quanto pelo *software* desenvolvido estão mostrados na Tabela II.

A partir da análise da Tabela II, pode-se observar que, mantendo-se a seção original, a área de aço obtida pelo *software* foi muito próxima da definida pelos autores em sua segunda tentativa. Com apenas a geometria liberada para a otimização, o programa computacional aumentou a área de concreto da seção transversal e reduziu a área de aço, utilizando, inclusive, a área de aço mínima para a seção de concreto encontrada.

Por sua vez, quando o  $f_{ck}$  também foi liberado, percebe-se que a seção transversal de concreto voltou a ser próxima da seção definida pelos autores, porém, em virtude do aumento da resistência do concreto ( $f_{ck}$ ), a área de aço utilizada foi bem inferior à adotada pelos autores.

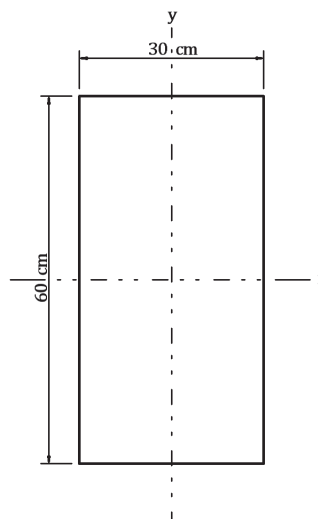


Figura 8 Seção original do Exemplo 1

O custo de cada seção está definido na Tabela III. Nesta, pode-se notar que, com a geometria otimizada, passou-se a ter uma redução de 24,3% em relação ao valor dos autores, e com a geometria e o  $f_{ck}$  otimizados a economia alcançou 41%. Os resultados da geometria e  $f_{ck}$  otimizados apontam uma geometria muito próxima da original, porém o ganho na resistência à compressão do concreto leva a uma redução substancial nas armaduras.

Tabela II Resultados obtidos para o exemplo 1

Autor	Análise	Base (cm)	Altura (cm)	Área de aço (cm <sup>2</sup> )	$f_{ck}$ (MPa)
Carvalho e Pinheiro (2009)	Primeira tentativa	30,00	60,00	48,5	20
	Segunda tentativa	30,00	60,00	39,6	20
Software	Seção original	30,00	60,00	40,3	20
	Geometria otimizada	40,63	70,92	11,53	20
	Geometria e $f_{ck}$ otimizados	31,47	58,95	7,42	45

Tabela III Comparação dos custos obtidos para o exemplo 1

Autor	Análise	Consumo de concreto (m <sup>3</sup> /m)	Consumo de aço (kg/m)	Consumo de formas (m <sup>2</sup> /m)	Custo total (R\$/m)	Diferença com a segunda tentativa (%)
Carvalho e Pinheiro (2009)	Primeira tentativa	0,18	38,07	1,80	381,14	+ 12,8
	Segunda tentativa	0,18	31,09	1,80	337,62	0
Software	Seção original	0,18	31,64	1,80	341,03	+ 1,0
	Geometria otimizada	0,29	9,05	2,23	255,28	- 24,3
	Geometria e $f_{ck}$ otimizados	0,19	5,82	1,81	199,26	- 41,0



## 4.2 Exemplo 2

O segundo exemplo apresenta um pilar de seção circular estudado por Braga e Ferreira (2011). De acordo com os autores, o pilar possuía diâmetro de 60 cm e  $f_{ck} = 25$  MPa como pode ser observado na Figura 9. O esforço normal solicitante de cálculo era de 4071,80 kN e não foram introduzidos momentos. Os resultados obtidos podem ser vistos na Tabela IV.

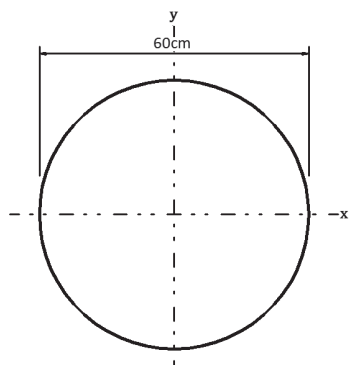


Figura 9 Pilar de seção circular do exemplo 2

Neste exemplo, nota-se que, para a seção original, a área de aço sofreu uma pequena redução e, em seguida, mesmo com a otimização da seção e do  $f_{ck}$ , manteve-se constante. É importante destacar que tanto a área de concreto quanto a de aço sofreram redução pelo cálculo otimizado, o que resulta em diminuição no custo e, com o aumento do  $f_{ck}$ , o diâmetro pode ser ainda mais reduzido. Uma comparação dos custos de cada solução pode ser verificada na Tabela V.

Pode-se observar que, neste exemplo, mesmo mantendo a seção original o resultado fornecido pelo programa foi satisfatório, gerando uma leve redução no custo linear da seção. Com a seção e o  $f_{ck}$  otimizados os resultados foram ainda mais econômicos, conforme esperado, chegando a aproximadamente 31% ao se utilizar o  $f_{ck}$  de 45 MPa.

Tabela IV Resultados obtidos para o exemplo 2

Autor	Análise	Diâmetro (cm)	Área de aço (cm <sup>2</sup> )	$f_{ck}$ (MPa)
Braga e Ferreira (2011)	Seção original	60,00	16,12	25
Software	Seção original	60,00	14,05	25
	Geometria otimizada	54,04	14,05	25
	Geometria e $f_{ck}$ otimizados	40,28	14,05	45

Tabela V Comparação dos custos obtidos para o exemplo 2

Autor	Análise	Consumo de concreto (m <sup>3</sup> /m)	Consumo de aço (kg/m)	Consumo de formas (m <sup>2</sup> /m)	Custo total (R\$/m)	Diferença com a seção original (%)
Braga e Ferreira (2011)	Seção original	0,28	12,65	1,88	262,40	0
Software	Seção original	0,28	11,03	1,88	252,26	-3,9
	Geometria otimizada	0,23	11,03	1,70	225,80	-13,9
	Geometria e $f_{ck}$ otimizados	0,13	11,03	1,27	181,79	-30,7

### 4.3 Exemplo 3

Este exemplo visa simular uma imposição arquitetônica de se embutir o pilar em alvenaria, logo, que o mesmo tivesse a dimensão mínima permitida pela norma: 14 cm. Para tanto, foi definido, como seção original, um pilar retangular com 14 cm de base e 60 cm de altura,  $f_{ck} = 30$  MPa submetido a um esforço normal de cálculo de 1500 kN (Figura 10). Logo após, os cálculos foram refeitos otimizando-se inicialmente a base, em seguida a altura da seção e, por fim, a altura e o  $f_{ck}$ . Os resultados podem ser vistos na Tabela VI.

O objetivo de se otimizar a base consistiu em verificar que o *software* converge para a dimensão mínima, conforme esperado. Mantendo-se o  $f_{ck}$  fixo e variando-se uma das seções, a outra ficou próxima da definida na seção original e a área de aço reduziu um pouco. Porém, com a liberação do  $f_{ck}$ , a seção de concreto foi transformada em uma seção de área próxima à mínima definida pela norma, utilizando-se  $f_{ck}$  de 80 MPa. Os custos obtidos para essas seções estão mostrados na Tabela VII.

Após a análise dos custos do exemplo 3, nota-se que, para o  $f_{ck}$  de 30 MPa, a diferença obtida foi pequena, pois a seção original já possuía dimensões adequadas. Entretanto, quando se otimizou a altura e o  $f_{ck}$ , obtendo-se menor área da seção e  $f_{ck}$  elevado, a redução foi significativa, ultrapassando 25% do valor original.

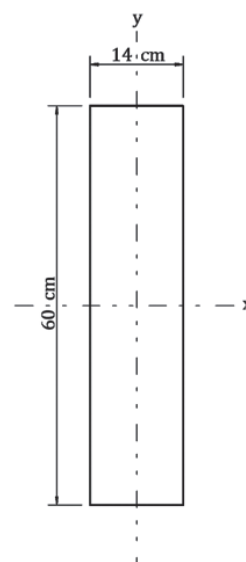


Figura 10 Pilar de seção retangular com dimensão imposta

Tabela VI Resultados obtidos para o exemplo 3

Autor	Análise	Base (cm)	Altura (cm)	Área de aço (cm <sup>2</sup> )	$f_{ck}$ (MPa)
Software	Seção original	14,00	60,00	8,21	30
	Base otimizada	14,42	60,00	6,36	30
	Altura otimizada	14,00	62,88	6,47	30
	Altura e $f_{ck}$ otimizados	14,00	27,57	6,47	80

Tabela VII Comparação dos custos obtidos para o exemplo 3

Autor	Análise	Consumo de concreto (m <sup>3</sup> /m)	Consumo de aço (kg/m)	Consumo de formas (m <sup>2</sup> /m)	Custo total (R\$/m)	Diferença com a seção original (%)
Software	Seção original	0,08	6,45	1,48	140,11	0
	Base otimizada	0,09	4,99	1,49	132,30	- 5,6
	Altura otimizada	0,09	5,08	1,54	135,71	- 3,1
	Altura e $f_{ck}$ otimizados	0,04	5,08	0,83	103,63	- 26,0

#### 4.4 Exemplo 4

O quarto exemplo trata de um pilar com carga elevada. A seção original definida foi uma seção quadrada de 50 × 50 cm,  $f_{ck} = 35$  MPa e esforço normal de cálculo de 5000 kN (Figura 11). Os resultados obtidos estão mostrados na Tabela VIII. Com a otimização da geometria a área de concreto pode ser reduzida, e otimizando-se também o  $f_{ck}$  a redução foi ainda maior, devido à utilização do  $f_{ck}$  de 45 MPa. Mantendo a base fixa e otimizando a altura e o  $f_{ck}$  também consegue-se um resultado melhor. Os custos obtidos para este exemplo podem ser vistos na Tabela IX, na qual nota-se que, em todos os casos, a otimização forneceu redução de no mínimo 10% em relação ao custo da seção original.

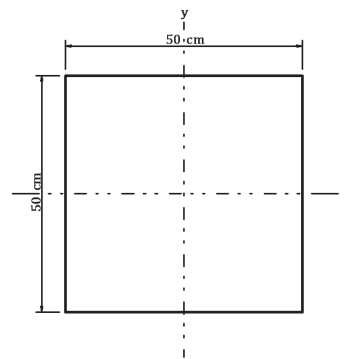


Figura 11 Seção original do pilar do exemplo 4

Tabela VIII Resultados obtidos para o exemplo 4

Autor	Análise	Base (cm)	Altura (cm)	Área de aço (cm <sup>2</sup> )	$f_{ck}$ (MPa)
Software	Seção original	50,00	50,00	17,25	35
	Geometria otimizada	44,86	44,86	17,25	35
	Geometria e $f_{ck}$ otimizados	39,56	39,56	17,25	45
	Base fixa	20,00	55,56	17,25	70

Tabela IX Comparação dos custos obtidos para o exemplo 4

Autor	Análise	Consumo de concreto (m <sup>3</sup> /m)	Consumo de aço (kg/m)	Consumo de formas (m <sup>2</sup> /m)	Custo total (R\$/m)	Diferença com a seção original (%)
Software	Seção original	0,25	13,54	2,00	267,72	0
	Geometria otimizada	0,20	13,54	1,79	240,88	- 10,0
	Geometria e $f_{ck}$ otimizados	0,16	13,54	1,58	224,61	- 16,1
	Base fixa	0,11	13,54	1,51	237,56	- 11,3

## 4.5 Exemplo 5

O último exemplo apresenta o caso de um pilar de seção hexagonal, submetido à compressão normal  $N_{sd} = 2000$  kN, distância entre o eixo das barras até a face da seção  $d' = 3$  cm, comprimento equivalente do elemento comprimido  $l_e = 3$  m e aço CA-50 (Figura 12). A partir destes dados o exemplo foi calculado de 3 formas. Inicialmente com o lado da seção e o  $f_{ck}$  definidos em 20 cm e 30 MPa, respectivamente. Em seguida, o lado foi liberado para a otimização e, por fim, mantendo-se a dimensão do lado fixa, optou-se por otimizar o  $f_{ck}$ . Os resultados obtidos pelo *software* desenvolvido estão mostrados na Tabela X.

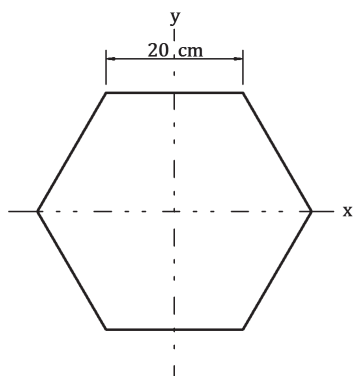


Figura 12 Pilar de seção hexagonal

A partir da análise da Tabela X, pode-se observar que, tanto com a geometria quanto com o  $f_{ck}$  otimizado, a área de aço necessária para a seção foi reduzida quase à metade da encontrada para a geometria e o  $f_{ck}$  fixos, e, para tal, a dimensão do lado e o  $f_{ck}$ , respectivamente, tiveram que ser aumentados.

O custo de cada seção está definido na Tabela XI. Nesta, pode-se notar que para a seção inicial o custo encontrado foi de R\$154,64. Entretanto, com a geometria otimizada, passou-se a ter uma redução de 8,45% em relação ao valor da seção original, e com o  $f_{ck}$  otimizado a economia chegou a 17,33%. Como a dimensão do lado e o valor do  $f_{ck}$  não sofreram alteração significativa, o fator determinante, neste caso, para o custo da seção foi a área de aço utilizada.

Tabela X Resultados obtidos para o exemplo

Análise	Lado (cm)	Área de aço (cm <sup>2</sup> )	$f_{ck}$ (MPa)
Geometria e $f_{ck}$ fixos	20,00	12,60	30
Geometria otimizada	22,24	6,90	30
$f_{ck}$ otimizado	20,00	6,90	35

Tabela XI Comparação dos custos obtidos para o exemplo.

Análise	Consumo de concreto (m <sup>3</sup> /m)	Consumo de aço (kg/m)	Consumo de formas (m <sup>2</sup> /m)	Custo total (R\$/m)	Diferença com a primeira tentativa (%)
Geometria e $f_{ck}$ fixos	0,10	10,13	1,20	154,64	0,0
Geometria otimizada	0,13	5,42	1,33	141,57	- 8,45
$f_{ck}$ otimizado	0,10	5,42	1,20	127,84	- 17,33

## 5 Conclusões

Os exemplos mostraram que mesmo com valores de seção e  $f_{ck}$  definidos, o software pode ser utilizado, pois fornece a área de aço necessária em função dos esforços solicitantes e diminui a imprecisão do dimensionamento tradicional, via análise de ábacos. Percebe-se também que quanto maior o número de parâmetros a serem otimizados, melhor o resultado obtido, em termos de custo. A redução encontrada foi significativa (acima de 15%) em todos os exemplos e chegou a ser superior a 30% em alguns casos.

Nota-se também que a utilização de dimensões inferiores a 19 cm forneceu resultados consistentes. E, no caso do exemplo 3, ao se otimizar a altura da seção e o  $f_{ck}$ , respeitando-se a imposição arquitetônica de utilização de pilar com base de 14 cm, obteve-se uma resistência característica do concreto à compressão de 80 MPa, apesar de seu custo ser muito superior às resistências menores.

Os resultados do exemplo 4 mostram que a formulação apresentada pode ser usada para outras geometrias, não somente para seções retangulares e circulares. E a possibilidade de otimização da resistência do concreto como variável de projeto possibilita automaticamente uma solução melhor no problema.

Para todos os exemplos pode-se concluir que as soluções ótimas foram encontradas, tendo em vista que durante a simulação do problema de otimização, vários pontos de partidas foram definidos e para todos os problemas as soluções convergiram para o mesmo ponto.

Em todos os exemplos rodados foram calculados a área de aço total necessária para a seção em função da quantidade de barras necessárias durante o processo de otimização. O ajuste das seções das barras para uma barra de diâmetro comercial pode levar a um ajuste no custo final, porém os resultados apontam que, mesmo assim, a solução final sempre será a solução ótima do problema.

Dessa forma, conclui-se que os concretos de elevadas resistências são recomendados para situações de projetos de pilares específicas, nas quais há imposição de dimensões ou necessidade de redução de seções, pois o aumento do  $f_{ck}$  possibilita a diminuição das dimensões. No entanto, em alguns casos este custo é um pouco superior ao encontrado na solução ótima. Em outras situações de dimensionamento, como flexão de lajes e vigas, o impacto do aumento da resistência do concreto na redução das dimensões das seções, não será tão preponderante como os resultados apontados no dimensionamento dos pilares. Estudos devem ser elaborados para ter uma análise mais sensível para outros elementos estruturais onde o esforço normal não seja o esforço preponderante para o dimensionamento.

## Referências

- [1] Alves, E. C.; Souza, P. M. S.; Gama, P. V. N. – "Optimum Design of Reinforced Concrete Slenders Columns", *Engineering and Science*, v. 6, no. 2, 60-75, 2017.
- [2] Associação Brasileira de Normas Técnicas – *NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto. Procedimento*. Rio de Janeiro, 2014.
- [3] Bordignon, R.; Kripka, M – "Optimum Design of Reinforced Concrete Columns Subjected to Uniaxial Flexural Compression", *Computers and Concrete*, 345-358, 2012
- [4] Braga, A. C. G.; Ferreira, W. G. – "Pilares mistos aço-concreto e comparativo de custo com pilares de aço e pilares de concreto armado", *Revista Escola de Minas*, v.64, p.407-414, 2011.
- [5] Carvalho, R. C.; Pinheiro, L. M. – *Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado*. Volume 2. 1.ª Edição. São Paulo: Editora PINI, 2009.
- [6] Franco, T. R. – *Análise do efeito de segunda ordem em pilares segundo a NBR6118 e pelos métodos exatos*. 2010. 67f. Dissertação (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2010.
- [7] Kripka, M.; Boscardini, J. T.; Casteli, S. D. – "Topology Optimization of Reinforced Concrete Plane Frames", *Revista Sul Americana de Engenharia Estrutural*, Passo Fundo, v.13, no. 2, p. 45-53. 2016.
- [8] Miranda, L. R. – *Cálculo e detalhamento prático de pilares para edificações de pequeno e médio porte*. 2008. 198f. Dissertação (Mestrado em Construção Civil) – Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2008.
- [9] Moraes, S. B. de – *Dimensionamento de pilares com concreto de alto desempenho em estruturas de edifícios*. 2013. 110f. Dissertação (Graduação em Engenharia Civil) – Escola Politécnica – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2013.
- [10] Pires, S. de L.; Silva, M. C. A. T. – "Otimização de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexão oblíqua considerando as não linearidades física e geométrica". VII Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas. Rio de Janeiro, 2014.
- [11] Rodrigues Júnior, S. J. – *Otimização de pilares de edifícios altos de concreto armado*. 2005. 154f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2005.
- [12] Sias, F. M.; Alves, E. C. – "Dimensionamento ótimo de pilares de concreto armado". *Revista Eletrônica de Engenharia Civil*, v.9, p.16-31, 2014.
- [13] Sias, F. M. – *Dimensionamento ótimo de pilares de concreto armado*. 2014. 153f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, 2014.
- [14] Smaniotto, A. – *Dimensionamento e detalhamento automático de pilares retangulares submetidos à flexão composta oblíqua*. 2005. 120f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2005.
- [15] Souza, P. M. S.; Alves, E. C. – "Dimensionamento otimizado de pilares de concreto de alta resistência". 58.º Congresso Brasileiro do Concreto. São Paulo, IBRACON, 2016.

