

# Dimensionamento otimizado de pilares mistos preenchidos de aço e concreto

## Optimum design of mixed steel and concrete filled columns

Jéssica Salomão Lourenção

Elcio Cassimiro Alves

### Resumo

A utilização de perfis de aço de seções tubulares para pilares mistos preenchidos de aço e concreto é uma solução interessante para a construção civil, visto que esse tipo de perfil apresenta grande resistência aos esforços solicitantes, além da dispensa do uso de formas e proteção contra o fogo e a corrosão. Este artigo objetiva estudar o dimensionamento ótimo de pilares mistos preenchidos de aço e concreto seguindo as prescrições da NBR 8800:2008 e a NBR 16239:2013. O desenvolvimento da formulação será feito dentro da plataforma do Matlab utilizando a ferramenta do *guide*. A solução do problema será obtida via método dos pontos interiores e programação quadrática sequencial para verificar a eficiência dos algoritmos de otimização. Exemplos de aplicação serão apresentados de modo a validar a formulação proposta bem como apontar melhores soluções a partir de um problema definido.

### Abstract

The use of tubular sections to filled concrete columns of steel and concrete is an interesting solution for the civil construction, since this type of profile presents great resistance to the requesting efforts, besides the dispensation of the use of forms and protection against the fire and corrosion. This article aims to study the optimal design of filled concrete columns of steel and concrete following the requirements of NBR 8800:2008 and NBR 16239:2013. The development of the formulation will be done within the Matlab platform using the *guide* tool. The solution of the problem will be obtained through the interior points method and quadratic sequential programming to verify the efficiency of the optimization algorithms. Application examples will be presented in order to validate the proposed formulation as well as to point out better solutions from a defined problem.

Palavras-chave: Pilares / Mistos / Ótimo / Tubular

Keywords: Columns / Mixed / Optimum / Tubular

## Jéssica Salomão Lourenção

Mestranda em Engenharia Civil  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Vitória – ES – Brasil  
jessica\_lourencao@hotmail.com

## Elcio Cassimiro Alves

Doutor em Engenharia e Tecnologias Espaciais  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Vitória – ES – Brasil  
elcio.calves1@gmail.com

### Aviso legal

As opiniões manifestadas na Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

### Legal notice

*The views expressed in the Portuguese Journal of Structural Engineering are the sole responsibility of the authors.*

LOURENÇÃO, J. [et al.] – Dimensionamento otimizado de pilares mistos preenchidos de aço e concreto. **Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas**. Ed. LNEC. Série III. n.º 8. ISSN 2183-8488. (novembro 2018) 33-48

## 1 Introdução

Os perfis tubulares de aço sempre foram muito utilizados na construção civil por apresentarem grande resistência aos esforços solicitantes, além de apresentarem vantagens tais como proteção contra o fogo e a corrosão, e dispensa do uso de formas. Um pilar misto preenchido é composto por um perfil de aço que trabalha em conjunto com o concreto, unindo a capacidade de resistência do aço com a robustez do concreto. De acordo com a NBR 8800:2008, temos três tipos de seções transversais disponíveis, circular, retangular e quadrada, possibilitando assim, inúmeras geometrias de seções transversais com ou sem armações que satisfazem cada situação de esforço solicitante.

Pilares mistos com este tipo de configuração foram citados em estudos como os de Fernandes (1997), De Nardin (1999), De Nardin (2003), Oliveira (2008), Gomes (2015), entre outros. Entretanto, os mesmos não apresentaram estudos que retratassem o dimensionamento desses pilares seguindo as exigências das normas brasileiras de dimensionamento, motivando, assim, o desenvolvimento deste estudo.

Este artigo objetiva apresentar a formulação e os critérios para o dimensionamento otimizado de pilares mistos preenchidos de aço e concreto em função do custo do pilar misto preenchido. Será desenvolvido um programa computacional para uso educacional no software Matlab que, após definidos os dados do perfil tubular, comprimento do pilar, características do ambiente e dos materiais e os esforços solicitantes de cálculo, dimensionará o pilar de forma otimizada, utilizando, para a otimização, o método dos pontos interiores e a programação quadrática sequencial existente na biblioteca do Matlab. Adicionalmente, o programa computacional tem por objetivo auxiliar no estudo do dimensionamento de pilares mistos preenchidos, visto que atualmente não existem muitas pesquisas relacionadas ao mesmo.

## 2 Dimensionamento de pilares mistos preenchidos de aço e concreto

Neste trabalho, o dimensionamento de pilares mistos preenchidos de aço e concreto será realizado com base nas prescrições da NBR 8800:2008, podendo, alternativamente, utilizar as modificações sugeridas pelas NBR 16239:2013. No entanto, num contexto internacional, os mesmos podem ser dimensionados de acordo com as normas: Eurocódigo 4 - Parte 1.1 (1994), ANSI/AISC 360 (2005), e outras.

### 2.1 Hipóteses básicas e limites de aplicabilidade do dimensionamento

O anexo P da NBR 8800:2008 aborda as diretrizes para o dimensionamento por método simplificado. As hipóteses básicas adotadas pelo método simplificado são: total interação entre aço e concreto; a flambagem local não pode ser um estado-limite último predominante; e as imperfeições iniciais são consistentes com aquelas adotadas na determinação da resistência de barras de aço.

O método ainda possui alguns limites de aplicabilidade, tais como:

os pilares mistos devem ter dupla simetria e seções transversais constantes ao longo do comprimento; o concreto deve possuir densidade normal; a contribuição do perfil metálico para a capacidade resistente da seção mista deve estar entre 0,2 e 0,9, conforme equação (1); a esbeltez relativa do pilar não pode ser superior a 2,0, de acordo com equação (2); as seções transversais preenchidas com concreto podem ser fabricadas sem qualquer armadura, exceto para algumas condições em situação de incêndio; a relação entre a altura e a largura das seções transversais mistas retangulares deve estar entre 0,2 e 5; e o projeto das armaduras deve atender aos requisitos da NBR 6118:2014.

$$\delta = \frac{A_a f_{yd}}{N_{pl,Rd}} \quad (1)$$

$$\lambda_{0,m} = \sqrt{\frac{N_{pl,R}}{N_e}} \quad (2)$$

## 2.2 Flambagem local dos elementos de aço

Para garantir a hipótese de que as resistências de todos os materiais devem ser atingidas sem que ocorra flambagem local dos elementos componentes do perfil de aço da seção transversal, não podem ser ultrapassadas as relações indicadas na Tabela 1.

**Tabela 1** Limitação do índice de esbeltez local dos pilares mistos preenchidos

Morfologia da seção	Limite de esbeltez
Seção tubular retangular e quadrangular preenchida	$\frac{b_i}{t} \leq 2,26 \sqrt{\frac{E_a}{f_y}}$
Seção tubular circular preenchida	$\frac{D}{t} \leq 0,15 \frac{E_a}{f_y}$

Fonte: ABNT NBR 8800:2008

## 2.3 Dimensionamento segundo a ABNT NBR 8800:2008 e a ABNT NBR 16239:2013

### 2.3.1 Dimensionamento a força axial de compressão

O dimensionamento por método simplificado proposto pela NBR 8800:2008 é aplicado, como explicado anteriormente, a pilares mistos duplamente simétricos e com seção transversal constante ao longo do seu comprimento. Para tal, a força axial resistente de cálculo da seção transversal à plastificação total é calculada de acordo com a equação (3).

$$N_{pl,Rd} = A_a f_{yd} + \alpha A_c f_{cd} + A_s f_{sd} \quad (3)$$

onde:

$\alpha$  coeficiente igual a 0,95 para seções tubulares circulares preenchidas com concreto e 0,85 para as demais seções.

Devido aos efeitos de retração e fluência do concreto, uma redução

no módulo de elasticidade do concreto é aplicada, tomando-se no lugar de  $E_c$  o valor de  $E_{c,red}$  descrito na equação (4).

$$E_{c,red} = E_c \frac{1}{1 + \left( \frac{N_{G,Sd}}{N_{Sd}} \right) \varphi} \quad (4)$$

A rigidez efetiva à flexão e a rigidez axial efetiva à compressão são calculadas respectivamente na equação (5) e equação (6), conforme a NBR 8800:2008. No entanto, na NBR 16239:2013 recomenda-se utilizar a equação (7) no cálculo da rigidez efetiva à flexão.

$$(EI)_e = E_a I_a + 0,6 E_{c,red} I_c + E_s I_s \quad (5)$$

$$(EA)_e = E_a A_a + E_{c,red} A_c + E_s A_s \quad (6)$$

$$\chi = \frac{1}{\lambda_{0,m}^2} \quad (7)$$

A força axial de flambagem elástica, equação (8), e o fator de redução da resistência, equação (9) e equação (10), são também obtidos conforme a NBR 8800:2008. No entanto, a NBR 16239:2013 recomenda utilizar a equação (11) para o cálculo do fator de redução da resistência.

$$N_e = \frac{\pi^2 (EI)_e}{(KL)^2} \quad (8)$$

$$\lambda_{0,m} \leq 1,5 \rightarrow \chi = 0,658^{\lambda_{0,m}^2} \quad (9)$$

$$\lambda_{0,m} > 1,5 \rightarrow \chi = \frac{0,877}{\lambda_{0,m}^2} \quad (10)$$

$$\chi = \frac{1}{(1 + \lambda_{0,m}^{4,48})^{1/2,24}} \quad (11)$$

Portanto, o cálculo da força axial resistente de cálculo é dado na equação (12) e posteriormente a capacidade resistente do pilar à compressão é verificada garantindo que a força axial resistente de cálculo seja maior ou igual à força axial solicitante de cálculo, equação (13).

$$N_{Rd} = \chi N_{pl,Rd} \quad (12)$$

$$N_{Rd} \geq N_{Sd} \quad (13)$$

### 2.3.2 Dimensionamento a flexo-compressão

Para o dimensionamento de pilares mistos sujeitos aos efeitos combinados de força axial de compressão e momento fletor em relação a um ou aos dois eixos de simetria da seção transversal podem ser utilizados um modelo de cálculo mais simplificado, modelo de cálculo I, ou um modelo mais rigoroso, modelo de cálculo II, de acordo com a NBR 8800:2008 ou um modelo de cálculo proposto pela NBR 16239:2013.

Para tal, o momento fletor resistente de plastificação de cálculo ( $M_{pl,Rd}$ ) de seções mistas duplamente simétricas em relação ao eixo x ou ao eixo y,  $M_{pl,x,Rd}$  e  $M_{pl,y,Rd}$  e o momento fletor máximo resistente de plastificação ( $M_{max,pl,Rd}$ ) em relação ao eixo x ou ao eixo y,  $M_{max,pl,x,Rd}$  e  $M_{max,pl,y,Rd}$  podem ser calculados de acordo com as equação (14) e

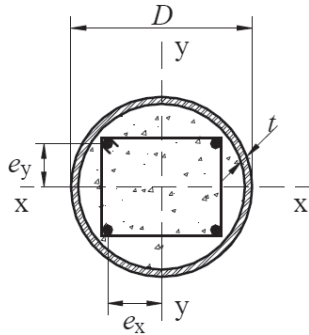
equação (15).

$$M_{pl,Rd} = f_{yd}(Z_a - Z_{an}) + 0,5f_{cd1}(Z_c - Z_{cn}) + f_{sd}(Z_s - Z_{sn}) \quad (14)$$

$$M_{max,pl,Rd} = f_{yd}Z_a + 0,5f_{cd1}Z_c + f_{sd}Z_s \quad (15)$$

O cálculo do módulo de resistência plástico para seções circulares preenchidas e seções tubulares retangulares e quadrangulares é descrito nas equações (16) a (27).

Seção tubular circular:



**Figura 1** Seção tubular circular preenchida com concreto (ABNT NBR 8800 (2008))

$$Z_c = \frac{(D-2t)^3}{4} - \frac{2}{3}\left(\frac{D}{2}-t\right)^3 - \left(\frac{D}{2}-t\right)^2(4-\pi)\left(\frac{D}{2}-t-\left(\frac{D}{2}-t\right)\right) - Z_s \quad (16)$$

$$Z_s = \sum_{i=1}^n |A_{si} e_i| \quad (17)$$

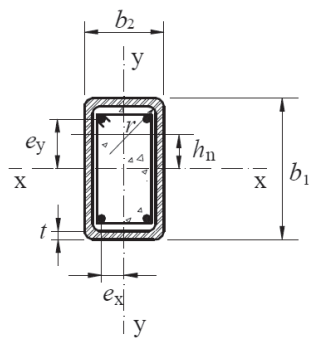
$$h_n = \frac{A_c f_{cd1} - A_{sn}(2f_{sd} - f_{cd1})}{2Df_{cd1} + 4t(2f_{yd} - f_{cd1})} \quad (18)$$

$$Z_{sn} = \sum_{i=1}^n |A_{sin} e_i| \quad (19)$$

$$Z_{cn} = (D-2t)h_n^2 - Z_{sn} \quad (20)$$

$$Z_{an} = Dh_n^2 - Z_{cn} - Z_{sn} \quad (21)$$

Seção tubular retangular e quadrangular:



**Figura 2** Seção tubular retangular/quadrangular preenchida com concreto (ABNT NBR 8800 (2008))

Eixo x:

$$Z_{c,x} = \frac{(b_2-2t)(b_1-2t)^2}{4} - \frac{2}{3}r^3 - r^2(4-\pi)\left(\frac{b_1}{2}-t-r\right) - Z_{s,x} \quad (22)$$

$$Z_{s,x} = \sum_{i=1}^n |A_{si} e_i| \quad (23)$$

$$h_{n,x} = \frac{A_c f_{cd1} - A_{sn}(2f_{sd} - f_{cd1})}{2b_2 f_{cd1} + 4t(2f_{yd} - f_{cd1})} \quad (24)$$

$$Z_{sn,x} = \sum_{i=1}^n |A_{sin} e_{yi}| \quad (25)$$

$$Z_{cn,x} = (b_2-2t)h_{n,x}^2 - Z_{sn,x} \quad (26)$$

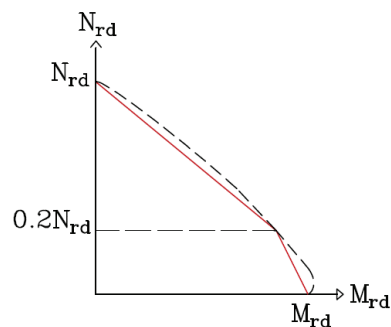
$$Z_{an,x} = b_2 h_{n,x}^2 - Z_{cn,x} - Z_{sn,x} \quad (27)$$

Eixo y:

Para o cálculo com relação ao eixo y, devem ser utilizadas as equações relativas ao eixo x, porém substituindo entre si as dimensões  $b_1$  e  $b_2$ , bem como os índices subscritos x e y.

### 2.3.2.1 Modelo de cálculo I (NBR 8800:2008)

No Modelo de Cálculo I, o diagrama de interação é composto por duas retas, como indica a Figura 3, e a verificação dos efeitos da força axial de compressão e dos momentos fletores deve satisfazer as equações (28) e (29).



**Figura 3** Diagrama de interação momento fletor-força normal

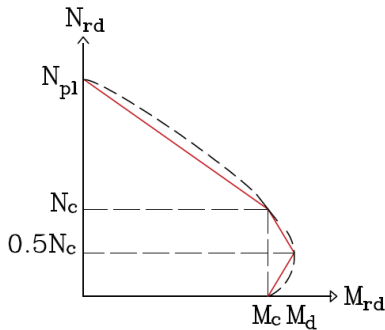
$$\frac{N_{sd}}{N_{Rd}} \geq 0,2 \quad \frac{N_{sd}}{N_{Rd}} + \frac{8}{9} \left( \frac{M_{x,sd}}{M_{x,Rd}} + \frac{M_{y,sd}}{M_{y,Rd}} \right) \leq 1,0 \quad (28)$$

$$\frac{N_{sd}}{N_{Rd}} < 0,2 \quad \frac{N_{sd}}{2N_{Rd}} + \left( \frac{M_{x,sd}}{M_{x,Rd}} + \frac{M_{y,sd}}{M_{y,Rd}} \right) \leq 1,0 \quad (29)$$

### 2.3.2.2 Modelo de cálculo II (NBR 8800:2008)

No Modelo de Cálculo II, a curva de interação é formada por três retas, como indica a Figura 4, o que pode aproximar melhor os segmentos de reta à curva tracejada que representa a relação do pilar flexo-comprimido. A interação entre o momento fletor e a força normal atuante devem satisfazer as equações (30) a (32)

sendo o cálculo de  $\mu_y$  idêntico ao cálculo de  $\mu_x$ , apenas substituindo as grandezas referentes a x por y.



**Figura 4** Diagrama de interação momento fletor-força normal

$$N_{sd} \geq N_c \quad \mu_x = 1 - \frac{N_{sd} - N_{pl,c,Rd}}{N_{pl,Rd} - N_{pl,c,Rd}} \quad (30)$$

$$\frac{N_c}{2} \leq N_{sd} \leq N_c \quad \mu_x = \left(1 - \frac{M_{d,x}}{M_{c,x}}\right) \left(\frac{2N_{sd}}{N_{pl,c,Rd}} - 1\right) + \frac{M_{d,x}}{M_{c,x}} \quad (31)$$

$$0 \leq N_{sd} \leq \frac{N_c}{2} \quad \mu_x = \left(1 - \frac{M_{d,x}}{M_{c,x}}\right) \left(\frac{2N_{sd}}{N_{pl,c,Rd}} - 1\right) + \frac{M_{d,x}}{M_{c,x}} \quad (32)$$

Os momentos devidos às imperfeições ao longo do pilar, respectivamente em relação aos eixos x e y são obtidos conforme a equação (33) e equação (34).

$$M_{x,i,SD} = \frac{N_{sd} L_x}{200 \left(1 - \frac{N_{sd}}{N_{e2,y}}\right)} \quad (33)$$

$$M_{y,i,SD} = \frac{N_{sd} L_y}{150 \left(1 - \frac{N_{sd}}{N_{e2,y}}\right)} \quad (34)$$

Assim, os momentos fletores solicitantes de cálculo totais, caso não seja feita análise mais rigorosa, são dados na equação (35) e equação (36).

$$M_{x,tot,SD} = M_{x,SD} + M_{x,i,SD} \quad (35)$$

$$M_{y,tot,SD} = M_{y,SD} + M_{y,i,SD} \quad (36)$$

Portanto, a verificação dos efeitos da força axial de compressão e dos momentos fletores pode ser feita por meio da equação (37) e equação (38).

$$N_{Rd} \geq N_{sd} \quad (37)$$

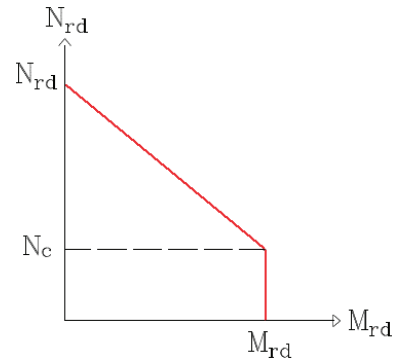
$$\frac{M_{x,tot,SD}}{\mu_x M_{c,x}} + \frac{M_{y,tot,SD}}{\mu_y M_{c,y}} \leq 1,0 \quad (38)$$

É importante ressaltar que, ao se entrar com os valores de  $M_{x,tot,SD}$  e  $M_{y,tot,SD}$  na equação (38), deve-se considerar o momento devido às imperfeições ao longo do pilar em relação apenas a um dos eixos, o que levar o resultado mais desfavorável. Isso implica que se  $M_{x,i,SD}$  for

considerado com seu valor diferente de zero,  $M_{y,i,SD}$  deve ser tomado igual a zero, e vice-versa.

### 2.3.2.3 Modelo de cálculo I (NBR 16239:2013)

No Modelo de cálculo, o diagrama de interação é composto por duas retas, como indica a Figura 5. A verificação dos efeitos da força axial de compressão e dos momentos fletores é feita por meio da equação (39) e da equação (40).



**Figura 5** Diagrama de interação momento fletor-força normal

$$N_{sd} \leq N_c \quad \frac{M_{x,SD}}{M_{x,Rd}} + \frac{M_{y,SD}}{M_{y,Rd}} \leq 1,0 \quad (39)$$

$$N_{sd} \leq N_c \quad \frac{N_{sd} - N_c}{N_{Rd} - N_c} + \frac{M_{x,SD}}{M_{x,Rd}} + \frac{M_{y,SD}}{M_{y,Rd}} \leq 1,0 \quad (40)$$

## 3 Formulação do problema de otimização

O problema de otimização se baseia em encontrar a solução ótima que maximize ou minimize a função objetivo. No caso do dimensionamento de pilares mistos preenchidos de aço e concreto, a função objetivo é o custo total do pilar (por metro linear), que engloba o custo do concreto, do perfil de aço e das armaduras utilizadas. Assim, a função objetivo a qual deseja-se minimizar pode ser definida por:

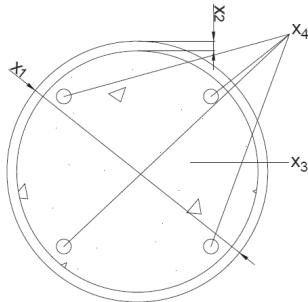
$$f_{(min)} = C_a A_a \rho_a + C_c A_c + C_s A_s \rho_s \quad (41)$$

em que  $C_a$  é o custo do perfil de aço (R\$/kg),  $A_a$  é a área de aço total do perfil,  $\rho_a$  é o peso específico do aço (kg/m³),  $C_c$  é o custo do concreto (R\$/m³),  $A_c$  é a área de concreto na seção transversal do perfil de aço (m²),  $C_s$  é o custo das armaduras de aço (R\$/kg),  $A_s$  é a área das armaduras de aço (m²) e  $\rho_s$  é o peso específico das armaduras (kg/m³). Os custos relacionados ao processo construtivo do pilar misto preenchido não estão sendo levados em consideração no software desenvolvido, os mesmos serão introduzidos posteriormente.

A solução ótima para a função objetivo acima definida é dada por meio de cálculos iterativos que alteram os valores das variáveis sucessivamente, até obter o ponto mínimo. Portanto, para os pilares mistos de seção tubular circular, Figura 6, temos as seguintes

variáveis:

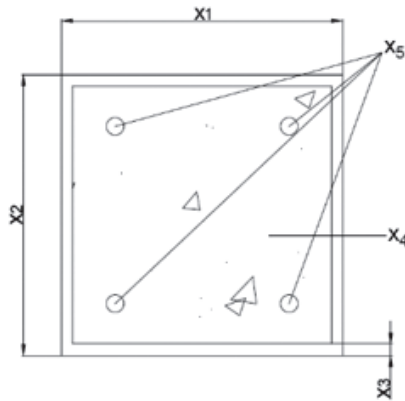
- Diâmetro do perfil ( $x_1 = D$ );
- Espessura do perfil ( $x_2 = t$ );
- Resistência característica do concreto a compressão ( $x_3 = f_{ck}$ );
- Área das armaduras de aço ( $x_4 = A_s$ ).



**Figura 6** Variáveis de projeto – seção tubular circular

Já para os pilares mistos de seção tubular retangular e quadrangular, Figura 7, as variáveis de projeto são as seguintes:

- Base do perfil ( $x_1 = b$ );
- Altura do perfil ( $x_2 = h$ );
- Espessura do perfil ( $x_3 = t$ );
- Resistência característica do concreto a compressão ( $x_4 = f_{ck}$ );
- Área das armaduras de aço ( $x_5 = A_s$ ).



**Figura 7** Variáveis de projeto – seção tubular retangular e quadrangular

No programa, o usuário define para pilares mistos de seção tubular circular se as variáveis  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  devem ser fixas ou ter seus valores alterados iterativamente, assim como as variáveis  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$  para os pilares mistos de seção retangular e quadrangular. Em vista disso, as dimensões do perfil tubular encontrado pelo algoritmo podem ser de um perfil tubular não catalogado ou comercial. Da mesma forma, a variável  $x_3$ , para seção tubular circular, e a variável  $x_4$ , para seções tubulares retangular e quadrangular, não são limitadas a classes existentes da NBR 6118:2014. Além disso, é possível também escolher se o pilar misto preenchido possuirá armaduras longitudinais ou não. A quantidade de armaduras longitudinais determinada pelo

processo de otimização será sempre um número inteiro, sendo que para seção tubular circular o número mínimo de armaduras longitudinais é seis e para seções tubulares retangular e quadrangular o número mínimo de armaduras longitudinais é quatro, as quais são determinadas em camadas de mesma quantidade. O espaçamento entre as armaduras longitudinais também será determinado pelo algoritmo, podendo ser um número inteiro ou decimal, obedecendo sempre os critérios da norma.

A solução ótima deve atender às funções de restrições, as quais, em geral, são recomendações e exigências das normas de dimensionamento. As funções de restrições inseridas no programa estão explicitadas a seguir:

Seção tubular circular:

Resistências devem ser superiores às solicitações:

$$N_{Rd} \geq N_{Sd} \quad (42)$$

$$M_{x,Rd} \geq M_{x,Sd} \quad (43)$$

$$M_{y,Rd} \geq M_{y,Sd} \quad (44)$$

sendo:

$N_{Rd}$  a força axial resistente de cálculo;

$N_{Sd}$  a força axial solicitante de cálculo;

$M_{x,Rd}$  e  $M_{y,Rd}$  os momentos resistentes de cálculo em relação ao eixo x e ao eixo y, da seção mista;

$M_{x,Sd}$  e  $M_{y,Sd}$  os momentos solicitantes de cálculo em relação ao eixo x e ao eixo y, da seção mista.

Resistência aos esforços combinados devem ser superiores às solicitações combinadas:

Modelo de Cálculo I

$$\frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} \geq 0,2 \quad \frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} + \frac{8}{9} \left( \frac{M_{x,Sd}}{M_{x,Rd}} + \frac{M_{y,Sd}}{M_{y,Rd}} \right) \leq 1,0 \quad (45)$$

$$\frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} < 0,2 \quad \frac{N_{Sd}}{2N_{Rd}} + \left( \frac{M_{x,Sd}}{M_{x,Rd}} + \frac{M_{y,Sd}}{M_{y,Rd}} \right) \leq 1,0 \quad (46)$$

Modelo de Cálculo II

$$\frac{M_{x,tot,Sd}}{\mu_x M_{c,x}} + \frac{M_{y,tot,Sd}}{\mu_y M_{c,y}} \leq 1,0 \quad (47)$$

Modelo de Cálculo

$$N_{Sd} \leq N_c \quad \frac{M_{x,Sd}}{M_{x,Rd}} + \frac{M_{y,Sd}}{M_{y,Rd}} \leq 1,0 \quad (48)$$

$$N_{Sd} \leq N_c \quad \frac{N_{Sd} - N_c}{N_{Rd} - N_c} + \frac{M_{x,Sd}}{M_{x,Rd}} + \frac{M_{y,Sd}}{M_{y,Rd}} \leq 1,0 \quad (49)$$

sendo:

$M_{x,tot,Sd}$  e  $M_{y,tot,Sd}$  os momentos solicitantes de cálculo total em relação ao eixo x e ao eixo y;

$M_{c,x}$  e  $M_{c,y}$  dados por  $0,9 M_{pl,x,Rd}$  e por  $0,9 M_{pl,y,Rd}$ ;

$N_c$  dado por  $\chi N_{pl,c,Rd}$

Limite de aplicabilidade:

$$\frac{D}{t} \leq 0,15 \frac{E_a}{f_y} \quad (50)$$

em que  $E_a$  é o módulo de elasticidade do aço e  $f_y$  é o limite de escoamento do aço.

Fator de contribuição do aço:

$$0,2 \leq \frac{A_a f_{yd}}{N_{pl,Rd}} \leq 0,9 \quad (51)$$

no qual  $f_{yd}$  é a resistência de cálculo ao escoamento do aço e  $N_{pl,Rd}$  é a força axial resistente de cálculo à plastificação total.

Taxas geométricas mínimas e máximas:

$$\text{máximo} \left( 0,004A_c; 0,15 \frac{N_{sd}}{f_{sd}} \right) \leq A_s \leq 0,04A_c \quad (52)$$

Número de barras mínimo na seção:

$$n \geq 6 \quad (53)$$

Espaçamento mínimo e máximo:

$$2 \text{ cm} \leq s = \frac{2\pi(x_1 - 2x_2 - 2d - n\varnothing_b)}{2n} \leq 40 \text{ cm} \quad (54)$$

em que  $s$  é o espaçamento entre barras, medido radialmente, e  $\varnothing_b$  é o diâmetro da barra.

Seção tubular retangular e quadrada:

Resistências devem ser superiores às solicitações:

$$N_{Rd} \geq N_{sd} \quad (55)$$

$$M_{x,Rd} \geq M_{x,sd} \quad (56)$$

$$M_{y,Rd} \geq M_{y,sd} \quad (57)$$

Resistência aos esforços combinados devem ser superiores às solicitações combinadas:

Modelo de Cálculo I

$$\frac{N_{sd}}{N_{Rd}} \geq 0,2 \quad \frac{N_{sd}}{N_{Rd}} + \frac{8}{9} \left( \frac{M_{x,sd}}{M_{x,Rd}} + \frac{M_{y,sd}}{M_{y,Rd}} \right) \leq 1,0 \quad (58)$$

$$\frac{N_{sd}}{N_{Rd}} < 0,2 \quad \frac{N_{sd}}{2N_{Rd}} + \left( \frac{M_{x,sd}}{M_{x,Rd}} + \frac{M_{y,sd}}{M_{y,Rd}} \right) \leq 1,0 \quad (59)$$

Modelo de Cálculo II

$$\frac{M_{x,tot,sd}}{\mu_x M_{c,x}} + \frac{M_{y,tot,sd}}{\mu_y M_{c,y}} \leq 1,0 \quad (60)$$

Modelo de Cálculo

$$N_{sd} \leq N_c \quad \frac{M_{x,sd}}{M_{x,Rd}} + \frac{M_{y,sd}}{M_{y,Rd}} \leq 1,0 \quad (61)$$

$$N_{sd} \leq N_c \quad \frac{N_{sd} - N_c}{N_{Rd} - N_c} + \frac{M_{x,sd}}{M_{x,Rd}} + \frac{M_{y,sd}}{M_{y,Rd}} \leq 1,0 \quad (62)$$

Limite de aplicabilidade:

$$\frac{b_i}{t} \leq 2,26 \sqrt{\frac{E_a}{f_y}} \quad (63)$$

Fator de contribuição do aço:

$$0,2 \leq \frac{A_a f_{yd}}{N_{pl,Rd}} \leq 0,9 \quad (64)$$

Relação entre a base e a altura:

$$0,2 \leq \frac{h}{b} \leq 5,0 \quad (65)$$

Taxas geométricas mínimas e máximas:

$$\text{máximo} \left( 0,004A_c; 0,15 \frac{N_{sd}}{f_{sd}} \right) \leq A_s \leq 0,04A_c \quad (66)$$

Número de barras mínimo na seção:

$$n_{cx}, n_{cy} \geq 2 \quad (67)$$

Espaçamento mínimo e máximo:

$$2 \text{ cm} \leq s_x = \frac{(x_1 - 2x_3 - 2d - n_{cx}\varnothing_b)}{n_{cx} - 1}, s_y = \frac{(x_2 - 2x_3 - 2d - n_{cy}\varnothing_b)}{n_{cy} - 1} \leq 40 \text{ cm} \quad (68)$$

em que  $s_x$  e  $s_y$  são os espaçamentos entre as barras e  $\varnothing_b$  é o diâmetro da barra.

Finalmente, tem-se o espaço de busca, ou região viável, o qual deverá conter a solução ótima, dada para pilares mistos preenchidos de seção por:

Seção tubular circular:

$$33,4 \text{ mm} \leq x_1 \leq 355,6 \text{ mm} \quad (69)$$

$$3,2 \text{ mm} \leq x_2 \leq 25 \text{ mm} \quad (70)$$

$$\text{máximo}(20 \text{ MPa}, f_{ck,min}) \leq x_3 \leq 90 \text{ MPa} \quad (71)$$

sendo  $f_{ck,min}$  o valor mínimo exigido pela norma para a resistência característica do concreto à compressão em função da classe de agressividade do local da edificação.

Seção tubular retangular:

$$40 \text{ mm} \leq x_1 \leq 200 \text{ mm} \quad (72)$$

$$60 \text{ mm} \leq x_2 \leq 400 \text{ mm} \quad (73)$$

$$3,6 \text{ mm} \leq x_3 \leq 16 \text{ mm} \quad (74)$$

$$\text{máximo}(20 \text{ MPa}, f_{ck,min}) \leq x_4 \leq 90 \text{ MPa} \quad (75)$$

Seção tubular quadrangular:

$$50 \text{ mm} \leq x_1 \leq 300 \text{ mm} \quad (76)$$

$$50 \text{ mm} \leq x_2 \leq 300 \text{ mm} \quad (77)$$

$$3,6 \text{ mm} \leq x_3 \leq 20 \text{ mm} \quad (78)$$

$$\text{máximo}(20 \text{ MPa}, f_{ck,min}) \leq x_4 \leq 90 \text{ MPa} \quad (79)$$

## 4 Exemplos

As soluções otimizadas apresentadas nos exemplos foram obtidas por meio do software desenvolvido que utiliza o método dos pontos interiores (IP) e o método de programação quadrática sequencial (SQP), Figura 8. Os métodos escolhidos são baseados em algoritmos determinísticos que geram uma sequência de possíveis soluções, utilizando, na maioria das vezes, o uso de pelo menos a primeira derivada da função objetivo em relação às variáveis de projeto que são dadas como funções matemáticas e relações funcionais. Eles partem de um ponto inicial e buscam determinar alguns pontos no interior da região viável do problema, e a partir destes pontos eles continuam a procurar pelo ponto ótimo. Todos os pontos obtidos em sequência possuirão sempre valores decrescentes a cada passo, mesmo que a convergência para o ponto ótimo não seja garantida.

Para tal, os exemplos abaixo foram obtidos nas literaturas citadas

com o objetivo de validação dos cálculos realizados pelo software desenvolvido; devido a isso, não possuem interligação entre si. No mais, o dimensionamento otimizado foi realizado duas vezes para cada exemplo atendendo as restrições exemplificadas na formulação do problema.

Para a comparação dos custos, os valores utilizados foram baseados na Tabela SINAPI, da Caixa Econômica Federal, de novembro de 2015 e referente à cidade de Vitória – ES. É importante salientar que a definição precisa dos custos dos materiais influencia direta e fortemente os resultados fornecidos pelo programa. Dessa forma, os custos devem ser levantados de forma adequada para não se obter resultados distorcidos. Além disso, para todos os exemplos, o programa de otimização busca qual a melhor combinação entre a geometria da seção e a resistência a compressão do concreto ( $f_{ck}$ ), no qual o resultado será a solução ótima dentro do grande espaço viável de busca.

**Dados de Entrada**

Seção Transversal: [ ]

**Concreto**

fck MPa: [ ]

Brita: [ ]

**Perfil de aço**

Tipo: [ ]

fyk MPa: [ ]

Ea MPa: [ ]

**Esforços Solicitantes**

Nsk kN: [ ]

Mx,sk kN.cm: [ ]

My,sk kN.cm: [ ]

**Armaduras**

Sem armaduras longitudinais

Com armaduras longitudinais

C. Agres.: [ ]

d' cm: [ ]

fys MPa: 500

Es MPa: 210000

**Norma**

NBR 8800:2008

NBR 16239:2013

**Dimensões do Perfil**

D mm: [ ]

h mm: [ ]

b mm: [ ]

t mm: [ ]

L cm: [ ]

**Preço dos Materiais**

Concreto		
C20 R\$/m³	315.00	C45 R\$/m³
C25 R\$/m³	326.57	C50 R\$/m³
C30 R\$/m³	336.22	C55 R\$/m³
C35 R\$/m³	346.84	C60 R\$/m³
C40 R\$/m³	358.42	C65 R\$/m³
C70 R\$/m³	707.72	C80 R\$/m³
C75 R\$/m³	768.99	C85 R\$/m³
C85 R\$/m³	891.53	C90 R\$/m³
C90 R\$/m³	952.81	

Perfil de aço: Perfil R\$/kg: 6.00

Armadura: Armadura R\$/kg: 6.00

**Otimização**

fck     Base

Diâmetro     Espessura

Altura

**CALCULAR**

**LIMPAR**

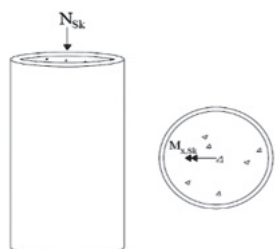
PPotimo v1.2018

Figura 8 Interface gráfica do software desenvolvido



#### 4.1 Pilar misto preenchido de perfil tubular circular

O primeiro exemplo é de um pilar misto preenchido composto por perfil tubular circular submetido a uma compressão axial e a flexão oblíqua no eixo x, Figura 9, de solução dada por um software *PilarMisto 3.04.11* (Caldas, Fakury e Souza Jr., 2018) utilizando a NBR 8800:2008. Dados do problema:



Diâmetro do perfil tubular = 323,80 mm  
Espessura do perfil tubular = 12,5 mm  
Comprimento do pilar misto = 4000 mm  
Resistência do concreto ( $f_{ck}$ ) = 30 MPa  
Limite de escoamento do aço ( $f_{yk}$ ) = 250 MPa  
Carregamento vertical ( $N_{sk}$ ) = 1428,57 kN.cm  
Momento na direção x ( $M_{x,sk}$ ) = 9428,57 kN.cm  
Momento na direção y ( $M_{y,sk}$ ) = 0 kN

Figura 9 Pilar misto circular

Na Tabela 2 são apresentados o diâmetro, a espessura, a resistência do concreto, os esforços resistentes e o custo total do pilar misto preenchido de seção tubular circular. O primeiro é o dimensionamento realizado pelo software *PilarMisto 3.04.11*. O segundo é o dimensionamento realizado pelo programa desenvolvido.

O dimensionamento realizado pelo programa apresentou um aumento de 0,4% no resultado da força resistente de compressão axial quando comparado com o dimensionamento realizado pelo software *PilarMisto 3.04.11*. Isso pode ter ocorrido devido a alguma inconsistência na formulação das áreas de aço e de concreto, como também dos esforços resistentes. No entanto, não houve diferença entre os valores dos momentos resistentes em nenhum dos eixos. Já o fato de os fatores de segurança serem diferentes deriva de a força resistente de compressão possuir esse acréscimo de 0,4%.

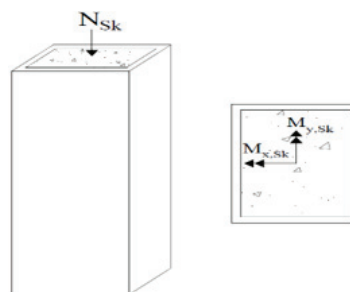
As Tabelas 3 e 4 apresentam o dimensionamento otimizado pelo processo dos pontos interiores (IP) e pelo processo de programação quadrática sequencial (SQP), respectivamente. As tabelas ainda informam quais foram as variáveis de projeto otimizadas e os respectivos esforços resistentes, além do custo total do pilar misto.

Os resultados encontrados com os dois métodos IP e SQP mostraram que não houve diferença nas soluções. Em qualquer situação de otimização das variáveis de projeto os valores obtidos foram os mesmos. Contudo, as linhas que não possuem resultados indicam que o software não conseguiu encontrar uma solução ótima devido a ser muito pequena a tolerância entre um passo e outro, ocorrendo assim a parada do software sem uma possível solução. Como pode ser observado, o melhor resultado foi obtido quando se deixou o software otimizar todas as variáveis de projeto, chegando

numa diferença percentual de 37,5% comparando com a solução dada no dimensionamento.

#### 4.2 Pilar misto preenchido de perfil tubular retangular

Este exemplo é de um pilar misto preenchido composto por perfil tubular retangular submetido a uma compressão axial e a flexão oblíqua no eixo x e no eixo y, Figura 10, de solução dada por um software *PilarMisto 3.04.11* (Caldas, Fakury e Souza Jr., 2018) utilizando a NBR 8800:2008. Dados do problema:



Base do perfil tubular = 180,00 mm  
Altura do perfil tubular = 380,00 mm  
Espessura do perfil tubular = 12,5 mm  
Comprimento do pilar misto = 3000 mm  
Resistência do concreto ( $f_{ck}$ ) = 40 MPa  
Limite de escoamento do aço ( $f_{yk}$ ) = 250 MPa  
Carregamento vertical ( $N_{sk}$ ) = 1071,43 kN  
Momento na direção x ( $M_{x,sk}$ ) = 9428,57 kN.cm  
Momento na direção y ( $M_{y,sk}$ ) = 5428,57 kN.cm

Figura 10 Pilar misto retangular

A Tabela 5 apresenta a base, a altura, a espessura, a resistência do concreto, os esforços resistentes e o custo total do pilar misto preenchido de seção tubular retangular. O primeiro é o dimensionamento realizado pelo software *PilarMisto 3.04.11*. O segundo é o dimensionamento realizado pelo programa desenvolvido.

O dimensionamento realizado pelo programa apresentou uma redução de 2,0% no resultado da força resistente de compressão axial, uma redução de 3,0% no resultado dos momentos resistentes no eixo x e no eixo y, quando comparados com o dimensionamento realizado pelo software *PilarMisto 3.04.11*. Isso pode ter ocorrido devido ao fato de considerarmos o valor do raio externo e interno dos perfis tubulares como sendo duas vezes a espessura e uma vez a espessura, respectivamente, ocasionando assim uma diferença nos resultados dos fatores de segurança.

Já as Tabelas 6 e 7 apresentam o dimensionamento otimizado pelo processo dos pontos interiores (IP) e pelo processo de programação quadrática sequencial (SQP), respectivamente. As tabelas ainda informam quais foram as variáveis de projeto otimizadas, as dimensões do perfil tubular e os respectivos esforços resistentes, além do custo total do pilar misto.

Os resultados encontrados com os dois métodos IP e SQP foram basicamente os mesmos, no entanto, houve uma diferença no

Tabela 2 Resultados das restrições dos softwares para o exemplo 1

Método	$D$ (mm)	$t$ (mm)	$f_{ck}$ (MPa)	$N_{Rd}$ (kN)	$M_{x,Rd}$ (kN.cm)	$M_{y,Rd}$ (kN.cm)	FS1	FS2	CT (R\$)
PilarMisto 3.04.11	323,8	12,5	30	3821	30611	30611	0,91	0,80	–
Software	323,8	12,5	30	3836	30611	30611	0,90	0,87	2397

Tabela 3 Resultados das restrições para o método IP do exemplo 1

Método (IP)			$D$ (mm)	$t$ (mm)	$f_{ck}$ (MPa)	$N_{Rd}$ (kN)	$M_{x,Rd}$ (kN.cm)	$M_{y,Rd}$ (kN.cm)	FS1	FS2	CT (R\$)
$D$	$t$	$f_{ck}$									
x			312,8	12,5	30	3629	28400	28400	0,96	1,00	2309
	x		323,8	10,9	30	3545	27284	27284	0,99	1,00	2115
		x	323,8	12,5	29,9	3832	30604	30604	0,91	0,87	2397
x	x	x	324,3	6,4	90	5136	19216	19216	1,00	0,76	1497
x	x										
		x	269,3	12,5	90	4231	22251	22251	1,00	0,91	2078
	x	x	323,8	6,4	90	5125	19243	19243	1,00	0,77	1501

Tabela 4 Resultados das restrições para o método SQP do exemplo 1

Método (SQP)			$D$ (mm)	$t$ (mm)	$f_{ck}$ (MPa)	$N_{Rd}$ (kN)	$M_{x,Rd}$ (kN.cm)	$M_{y,Rd}$ (kN.cm)	FS1	FS2	CT (R\$)
$D$	$t$	$f_{ck}$									
x			312,8	12,5	30	3629	28400	28400	0,96	1,00	2309
	x		323,8	10,9	30	3545	27284	27284	0,99	1,00	2115
		x									
x	x	x	324,3	6,4	90	5136	19216	19216	1,00	0,76	1497
x	x		355,6	8,3	30	3591	26485	26485	1,00	0,87	1830
x		x	269,3	12,5	90	4231	22251	22251	1,00	0,91	2078
	x	x									

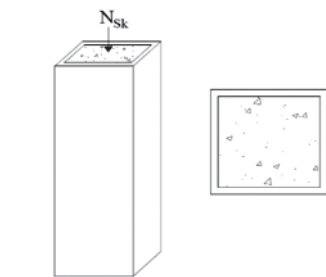
Tabela 5 Resultados das restrições dos softwares para o exemplo 2

Método	$b$ (mm)	$h$ (mm)	$t$ (mm)	$f_{ck}$ (MPa)	$N_{Rd}$ (kN)	$M_{x,Rd}$ (kN.cm)	$M_{y,Rd}$ (kN.cm)	FS1	FS2	CT (R\$)
PilarMisto 3.04.11	180,0	380,0	12,5	40	3890	40578	22701	0,97	0,94	–
Software	180,0	380,0	12,5	40	3812	39410	22160	1,00	0,97	1892

resultado encontrado quando as variáveis de projeto, base e resistência do concreto, foram selecionadas para serem otimizadas. Os valores obtidos foram diferentes, no entanto, o custo total do pilar misto preenchido se mostrou o mesmo. Além disso, as linhas que não possuem resultados indicam que o software não conseguiu encontrar uma solução ótima devido a tolerância entre um passo e outro ser muito pequena, ocorrendo assim a parada do software sem uma possível solução. Novamente a melhor solução foi obtida quando se liberou todas variáveis para serem otimizadas, obtendo uma redução no custo final de 21,98%.

### 4.3 Pilar misto preenchido de perfil tubular quadrangular

Um pilar misto preenchido composto por perfil tubular quadrangular submetido somente a uma compressão axial, Figura 11, de solução dada pelo software *PilarMisto 3.04.11* (Caldas, Fakury e Souza Jr., 2018) utilizando a NBR 8800:2008. Dados do problema:



Base do perfil tubular = 150,00 mm  
Altura do perfil tubular = 150,00 mm  
Espessura do perfil tubular = 12,5 mm  
Comprimento do pilar misto = 3000 mm  
Resistência do concreto ( $f_{ck}$ ) = 30 MPa  
Limite de escoamento do aço ( $f_{yk}$ ) = 250 MPa  
Carregamento vertical ( $N_{sk}$ ) = 714,29 kN  
Momento na direção x ( $M_{x,sk}$ ) = 0 kN  
Momento na direção y ( $M_{y,sk}$ ) = 0 kN

Figura 11 Pilar misto quadrangular

A Tabela 8 apresenta as dimensões do perfil, a resistência do concreto, os esforços resistentes e o custo total. Na primeira linha tem-se o dimensionamento realizado pelo software *PilarMisto 3.04.11*, enquanto na segunda é o dimensionamento realizado pelo programa desenvolvido.

O dimensionamento realizado pelo programa apresentou uma redução de 5,6% no resultado da força resistente de compressão axial, uma redução de 5,5% no resultado dos momentos resistentes no eixo x e no eixo y, quando comparados com o dimensionamento realizado pelo software *PilarMisto 3.04.11*. Isso pode ter ocorrido devido ao fato de considerarmos o valor do raio externo e interno dos perfis tubulares como sendo duas vezes a espessura e uma vez a espessura, respectivamente.

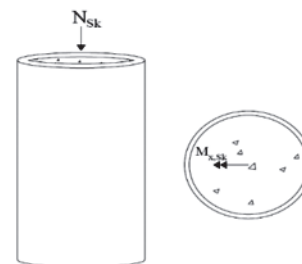
Já as Tabelas 9 e 10 apresentam o dimensionamento otimizado pelo processo dos pontos interiores (IP) e pelo processo de programação quadrática sequencial (SQP), respectivamente. As tabelas ainda informam quais foram as variáveis de projeto otimizadas e os

respectivos esforços resistentes, além do custo total do pilar misto. As linhas que não possuem resultados indicam que o software não conseguiu encontrar uma solução ótima por a tolerância entre um passo e outro ser muito pequena, ocorrendo assim a parada do software sem uma possível solução.

Os resultados encontrados com os dois métodos IP e SQP foram basicamente os mesmos, no entanto, houve uma diferença no resultado encontrado quando a variável de projeto, resistência do concreto, foi selecionada para ser otimizada. Os valores obtidos foram diferentes, no entanto, o custo total do pilar misto preenchido se mostrou o mesmo. Além disso, as linhas que não possuem resultados indicam que o software não conseguiu encontrar uma solução ótima devido a tolerância entre um passo e outro ser muito pequena, ocorrendo assim a parada do software sem uma possível solução. De forma similar aos exemplos anteriores, a melhor solução foi obtida considerando todas as variáveis no problema de otimização, porém neste caso a redução do custo chegou aos 65,1%.

### 4.4 Pilar misto preenchido de perfil tubular circular

Neste exemplo, é dado um pilar misto preenchido composto por perfil tubular circular submetido a uma compressão axial e a flexão oblíqua no eixo x, Figura 12, de solução dada por Canales (2014) utilizando a NBR 16239:2013. Dados do problema:



Diâmetro do perfil tubular = 323,80 mm  
Espessura do perfil tubular = 10,3 mm  
Comprimento do pilar misto = 4000 mm  
Resistência do concreto ( $f_{ck}$ ) = 30 MPa  
Limite de escoamento do aço ( $f_{yk}$ ) = 250 MPa  
Carregamento vertical ( $N_{sk}$ ) = 1428,57 kN.cm  
Momento na direção x ( $M_{x,sk}$ ) = 9428,57 kN.cm  
Momento na direção y ( $M_{y,sk}$ ) = 0 kN

Figura 12 Pilar misto circular

Na Tabela 11 é apresentada o diâmetro, a espessura, a resistência do concreto, os esforços resistentes e o custo total do pilar misto preenchido de seção tubular circular. O primeiro dimensionamento é o realizado por Canales (2014). O segundo é o dimensionamento realizado pelo programa desenvolvido.

O dimensionamento realizado pelo programa apresentou um aumento de 8,5% no resultado da força resistente de compressão axial quando comparado com o dimensionamento realizado por Canales (2014) e uma diminuição no fator de segurança devida a força resistente de compressão.

Já as Tabelas 12 e 13 apresentam o dimensionamento otimizado pelo

Tabela 6 Resultados das restrições para o método IP do exemplo 2

Método (IP)				b (mm)	h (mm)	t (mm)	f <sub>ck</sub> (MPa)	N <sub>Rd</sub> (kN)	M <sub>x,Rd</sub> (kN.cm)	M <sub>y,Rd</sub> (kN.cm)	FS1	FS2	CT (R\$)
b	h	t	f <sub>ck</sub>										
x				179,2	380,0	12,5	40	3799	39311	22030	1,00	0,98	1889
	x			180,0	378,6	12,5	40	3801	39174	22092	1,00	0,98	1887
		x		180,0	380,0	12,4	40	3880	39240	22060	1,00	0,98	1993
			x										
x	x	x	x	200,0	400,0	7,9	90	5098	34156	18650	1,00	0,87	1476
x	x	x		200,0	400,0	10,0	40	3844	38322	22250	1,00	0,92	1678
x	x		x	200,0	305,1	12,5	90	4648	31467	22195	1,00	0,99	1779
x		x	x	200,0	380,0	8,5	90	4987	33607	19296	1,00	0,90	1523
	x	x	x										
x	x			200,0	346,7	12,5	40	3847	36114	23692	1,00	0,96	1847
x		x		200,0	380,0	10,8	40	3839	37520	22780	1,00	0,92	1736
x			x	157,6	380,0	12,5	90	4415	39575	19038	0,99	1,00	1888
	x	x		180,0	400,0	11,5	40	3794	40179	21608	1,00	0,95	1821
	x		x	180,0	335,1	12,5	90	4531	34440	20588	1,00	1,00	1811

Tabela 7 Resultados das restrições para o método SQP do exemplo 2

Método (SQP)				b (mm)	h (mm)	t (mm)	f <sub>ck</sub> (MPa)	N <sub>Rd</sub> (kN)	M <sub>x,Rd</sub> (kN.cm)	M <sub>y,Rd</sub> (kN.cm)	FS1	FS2	CT (R\$)
b	h	t	f <sub>ck</sub>										
x				179,2	380,0	12,5	40	3799	39311	22030	1,00	0,98	1889
	x			180,0	378,6	12,5	40	3801	39174	22092	1,00	0,98	1887
		x		180,0	380,0	12,4	40	3880	39240	22060	1,00	0,98	1993
			x										
x	x	x	x	200,0	400,0	7,9	90	5098	34156	18650	1,00	0,87	1476
x	x	x		200,0	400,0	10,0	40	3844	38322	22250	1,00	0,92	1678
x	x		x	200,0	305,1	12,5	90	4648	31467	22195	1,00	0,99	1779
x		x	x	200,0	380,0	8,5	90	4987	33607	19296	1,00	0,90	1523
	x	x	x	180,0	400,0	9,2	90	4772	36666	18477	1,00	0,94	1602
x	x			200,0	346,7	12,5	40	3847	36114	23692	1,00	0,96	1847
x		x		200,0	380,0	10,8	40	3839	37520	22780	1,00	0,92	1736
x			x	163,2	380,0	12,5	69,6	4161	39263	19790	1,00	0,99	1877
	x	x		180,0	400,0	11,5	40	3794	40179	21608	1,00	0,95	1821
	x		x	180,0	335,1	12,5	90	4531	34440	20588	1,00	1,00	1811
		x	x	180,0	380,0	10,0	90	4689	35994	19078	1,00	0,96	1656

Tabela 8 Resultados das restrições dos softwares para o exemplo 3

Método	$b/h$ (mm)	$t$ (mm)	$f_{ck}$ (MPa)	$N_{Rd}$ (kN)	$M_{x,Rd}$ (kN.cm)	$M_{y,Rd}$ (kN.cm)	FS1	FS2	CT (R\$)
PilarMisto 3.04.11	150,0	12,5	30	1555	8229	8229	0,00	0,00	–
Software	150,0	12,5	30	1468	7780	7780	0,00	0,00	930

Tabela 9 Resultados das restrições para o método IP do exemplo 3

Método (IP)			$b/h$ (mm)	$t$ (mm)	$f_{ck}$ (MPa)	$N_{Rd}$ (kN)	$M_{x,Rd}$ (kN.cm)	$M_{y,Rd}$ (kN.cm)	FS1	FS2	CT (R\$)
$b/h$	$t$	$f_{ck}$									
x			121,8	12,5	30	1000	4755	4755	0,00	0,00	725
	x		150,0	6,8	30	1000	4940	4940	0,00	0,00	549
		x	150,0	12,5	29,9	1468	7780	7780	0,00	0,00	930
x	x	x	140,1	3,6	90	1000	2733	2733	0,00	0,00	324
x	x		173,9	4,3	30	1000	4688	4688	0,00	0,00	431
x		x	113,9	12,5	90	1000	4237	4237	0,00	0,00	682
	x	x	150,0	3,7	74,3	1071	3196	3196	0,00	0,00	347

Tabela 10 Resultados das restrições para o método SQP do exemplo 3

Método (SQP)			$b/h$ (mm)	$t$ (mm)	$f_{ck}$ (MPa)	$N_{Rd}$ (kN)	$M_{x,Rd}$ (kN.cm)	$M_{y,Rd}$ (kN.cm)	FS1	FS2	CT (R\$)
$b/h$	$t$	$f_{ck}$									
x			121,8	12,5	30	1000	4755	4755	0,00	0,00	725
	x		150,0	6,8	30	1000	4940	4940	0,00	0,00	549
		x	150,0	12,5	20	1401	7573	7673	0,00	0,00	929
x	x	x	140,1	3,6	90	1000	2733	2733	0,00	0,00	324
x	x		173,9	4,3	30	1000	4688	4688	0,00	0,00	431
x		x	113,9	12,5	90	1000	4237	4237	0,00	0,00	682
	x	x									

Tabela 11 Resultados das restrições dos softwares para o exemplo 4

Método	$D$ (mm)	$t$ (mm)	$f_{ck}$ (MPa)	$N_{Rd}$ (kN)	$M_{x,Rd}$ (kN.cm)	$M_{y,Rd}$ (kN.cm)	FS3	CT (R\$)
Canais (2014)	323,8	10,3	30	3430	26006	26006	0,88	–
Software	323,8	10,3	30	3722	26006	26006	0,75	2008

Tabela 12 Resultados das restrições para o método IP do exemplo 4

Método (IP)			D (mm)	t (mm)	f <sub>ck</sub> (MPa)	N <sub>Rd</sub> (kN)	M <sub>x,Rd</sub> (kN.cm)	M <sub>y,Rd</sub> (kN.cm)	FS3	CT (R\$)
D	t	f <sub>ck</sub>								
x			297,0	10,3	30	3263	21594	21594	1,00	1829
	x		323,8	7,2	30	3104	19096	19096	1,00	1446
		x	323,8	10,3	29,9	3717	26000	26000	0,75	2008
x	x	x	286,2	5,7	90	4377	13200	13200	1,00	1165
x	x									
x		x	233,7	10,3	90	3370	13963	13963	1,00	1498
	x	x	323,8	6,4	48,3	3844	18032	18032	0,73	1337

Tabela 13 Resultados das restrições para o método SQP do exemplo 4

Método (SQP)			D (mm)	t (mm)	f <sub>ck</sub> (MPa)	N <sub>Rd</sub> (kN)	M <sub>x,Rd</sub> (kN.cm)	M <sub>y,Rd</sub> (kN.cm)	FS3	CT (R\$)
D	t	f <sub>ck</sub>								
x			297,0	10,3	30	3263	21594	21594	1,00	1829
	x		323,8	7,2	30	3104	19096	19096	1,00	1446
		x	323,8	10,3	20	3248	25277	25277	0,97	2002
x	x	x	286,2	5,7	90	4377	13200	13200	1,00	1165
x	x		330,2	6,5	30	3069	18339	18339	1,00	1356
x		x	233,7	10,3	90	3370	13963	13963	1,00	1498
	x	x	323,8	6,4	48,3	3844	18032	18032	0,73	1337

Tabela 14 Resultados das restrições dos softwares para o exemplo 5

Método	b/h (mm)	t (mm)	f <sub>ck</sub> (MPa)	N <sub>Rd</sub> (kN)	M <sub>x,Rd</sub> (kN.cm)	M <sub>y,Rd</sub> (kN.cm)	FS3	CT (R\$)
Canais (2014)	290,0	9,5	30	3400	27612	27612	0,89	–
Software	290,0	9,5	30	3664	27612	27612	0,77	2063

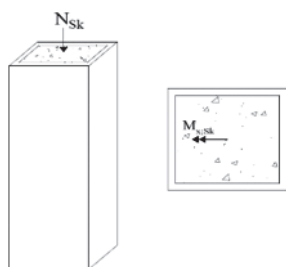
processo dos pontos interiores (IP) e pelo processo de programação quadrática sequencial (SQP), respectivamente. As tabelas ainda informam quais foram as variáveis de projeto otimizadas e os respectivos esforços resistentes, além do custo total do pilar misto.

Os resultados encontrados com os dois métodos IP e SQP foram basicamente os mesmos, no entanto, houve uma diferença no resultado encontrado quando a variável de projeto, resistência do concreto, foi selecionada para ser otimizada. Os valores obtidos foram diferentes, no entanto, o custo total do pilar misto preenchido se mostrou bem próximo. Além disso, as linhas que não possuem resultados indicam que o software não conseguiu encontrar uma solução ótima devido a tolerância entre um passo e outro ser muito

pequena, ocorrendo assim a parada do software sem uma possível solução. Novamente a melhor solução com uma redução no custo de 41,98% foi obtida quando se considerou todas as variáveis no problema de otimização.

#### 4.5 Pilar misto preenchido de perfil tubular quadrangular

Um pilar misto preenchido composto por perfil tubular quadrangular submetido a compressão axial e flexão oblíqua no eixo x, Figura 13, de solução dada por Canales (2014) utilizando a NBR 16239:2013. Dados do problema:



Base do perfil tubular = 290,00 mm  
 Altura do perfil tubular = 290,00 mm  
 Espessura do perfil tubular = 9,5 mm  
 Comprimento do pilar misto = 4000 mm  
 Resistência do concreto ( $f_{ck}$ ) = 30 MPa  
 Limite de escoamento do aço ( $f_{yk}$ ) = 250 MPa  
 Carregamento vertical ( $N_{sk}$ ) = 1428,57 kN.cm  
 Momento na direção x ( $M_{x,Sk}$ ) = 9428,57 kN.cm  
 Momento na direção y ( $M_{y,Sk}$ ) = 0 kN

**Figura 13** Pilar misto quadrangular

A Tabela 14 apresenta as dimensões do perfil, a resistência do concreto, os esforços resistentes e o custo total. Na primeira linha tem-se o dimensionamento realizado por Canales (2014), e na segunda o dimensionamento realizado pelo programa desenvolvido.

O dimensionamento realizado pelo programa apresentou um aumento de 7,7% no resultado da força resistente de compressão axial quando comparado com o dimensionamento realizado por Canales (2014) e uma diminuição no fator de segurança devida a força resistente de compressão. Isso pode ter ocorrido devido ao fato de considerarmos o valor do raio externo e interno dos perfis tubulares como sendo duas vezes a espessura e uma vez a espessura, respectivamente.

As Tabelas 15 e 16 apresentam o dimensionamento otimizado pelo processo dos pontos interiores (IP) e pelo processo de programação quadrática sequencial (SQP), respectivamente. As tabelas ainda informam quais foram as variáveis de projeto otimizadas e os respectivos esforços resistentes, além do custo total do pilar misto.

Os resultados encontrados com os dois métodos IP e SQP foram basicamente os mesmos, no entanto, houve uma diferença no resultado encontrado quando a variável de projeto, resistência do concreto, foi selecionada para ser otimizada. Os valores obtidos foram diferentes, no entanto, o custo total do pilar misto preenchido se mostrou bem próximo. Além disso, as linhas que não possuem resultados indicam que o software não conseguiu encontrar uma solução ótima por a tolerância entre um passo e outro ser muito pequena, ocorrendo assim a parada do software sem uma possível solução. A redução final no custo foi de 41,66%.

**Tabela 15** Resultados das restrições para o método IP do exemplo 5

Método (IP)			b/h (mm)	t (mm)	f <sub>ck</sub> (MPa)	N <sub>Rd</sub> (kN)	M <sub>x,Rd</sub> (kN.cm)	M <sub>y,Rd</sub> (kN.cm)	FS3	CT (R\$)
b/h	t	f <sub>ck</sub>								
x			266,4	9,5	30	3226	22945	22945	1,00	1877
	x		290,0	7,1	30	3152	21734	21734	0,96	1599
		x	290,0	9,5	29,9	3660	27606	27606	0,77	2063
x	x	x	239,8	5,9	90	3784	13200	12300	1,00	1221
x	x		287,4	7,1	30	3093	21145	21145	1,00	1570
x		x	211,3	9,5	90	3367	14827	14827	1,00	1541
	x	x								

**Tabela 16** Resultados das restrições para o método SQP do exemplo 5

Método (SQP)			b/h (mm)	t (mm)	f <sub>ck</sub> (MPa)	N <sub>Rd</sub> (kN)	M <sub>x,Rd</sub> (kN.cm)	M <sub>y,Rd</sub> (kN.cm)	FS3	CT (R\$)
b/h	t	f <sub>ck</sub>								
x			266,4	9,5	30	3226	22945	22945	1,00	1877
	x		290,0	7,1	30	3152	21734	21734	0,96	1599
		x	290,0	9,5	20	3230	26918	26918	0,97	2057
x	x	x	239,8	5,9	90	3784	13200	12300	1,00	1221
x	x		287,4	7,1	30	3093	21145	21145	1,00	1570
x		x	211,3	9,5	90	3367	14827	14827	1,00	1541
	x	x	290,0	7,1	28,6	3088	21660	21660	1,00	1598

## 5 Conclusões

O dimensionamento ótimo de pilares mistos preenchidos de aço e concreto utilizando técnicas de otimização, existentes dentro do software Matlab, foi desenvolvido para estimar o menor custo total deste elemento estrutural, tendo por base as propriedades e custos unitários dos materiais utilizados para a sua construção, bem como as diversas restrições impostas pelas normas vigentes no país.

Os resultados encontrados pelos dois métodos de otimização utilizados, método dos pontos interiores e programação quadrática sequencial, praticamente em todos os exemplos convergiram para uma mesma solução, apontando que a solução encontrada em torno dessas dimensões é a solução otimizada do problema.

A formulação tanto para o dimensionamento quanto para o problema de otimização foi comparada com as resoluções de problemas resolvidos na literatura e com resultados obtidos por meio de software, apresentando resultados bem próximos e significativos, validando assim a utilização do algoritmo. No entanto, o software utilizado nas comparações não revela as formulações que utiliza para o dimensionamento de pilares mistos preenchidos, porém os resultados se mostraram consistentes.

No mais, realizar o dimensionamento ótimo de pilares mistos preenchidos frente as solicitações impostas ao mesmo possibilita ao profissional uma análise mais analítica para a escolha do tipo de perfil tubular, bem como as dimensões deste elemento estrutural e a resistência do concreto, garantindo assim uma redução de valores expressivos para o seu custo total.

Além disso, ressalta-se que o estudo realizado pode sofrer impactos quando comparado com as normas internacionais de dimensionamento de pilares mistos preenchidos de aço e concreto devido as particularidades de cada norma nos cálculos para obtenção dos esforços resistentes.

## Referências

- [1] Associação Brasileira de Normas Técnicas. ABNT, NBR 6118 – *Projeto de estruturas de concreto - Procedimento* (2014).
- [2] Associação Brasileira de Normas Técnicas. ABNT, NBR 8800 – *Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios* (2008).
- [3] Associação Brasileira de Normas Técnicas. ABNT, NBR 16239 – *Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edificações com perfis tubulares* (2013).
- [4] Canales, Ana Flávia – *Estudo do dimensionamento de pilares de aço tubulares e pilares mistos de perfis tubulares preenchidos com concreto de acordo com a ABNT NBR 16239:2013*. 2014. 72 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2014.
- [5] Fernandes, Juliana Ferreira – *Pilares mistos: tubos de aço com seções quadradas e retangulares e núcleo de concreto de alta resistência*. 1997. 149 f. 52 Dissertação (Mestre em Engenharia Civil) – Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, 1997.
- [6] De Nardin, Silvana – *Estudo teórico-experimental de pilares mistos compostos por tubos de aço preenchidos com concreto de alta resistência*. 1999. 148 f. Dissertação (Mestre em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1999.
- [7] De Nardin, Silvana – *Pilares mistos preenchidos: estudo da flexo-compressão e de ligações viga-pilar*. 2003. 323 f. Tese (Doutor em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2003.
- [8] Gomes, Harlley Davidson – *Análise numérica de pilares mistos de aço e concreto tubulares circulares com concreto de alto desempenho*. 2015. 158 f. Dissertação (Mestre em Engenharia Civil) – Engenharia Civil, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2015.
- [9] Oliveira, Walter Luiz Andrade de – *Análise teórico-experimental de pilares mistos preenchidos de seção circular*. 2008. 251 f. Tese (Doutor em Engenharia de Estruturas) – Engenharia Civil, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.
- [10] Vallourec Tubos Do Brasil – *Tubos estruturais seção circular, quadrada e retangular*. Minas Gerais: Belo Horizonte, 2017. 56 p. Catálogo estrutural.
- [11] Caldas, R. B; Fakury, R. H.; Souza Jr., J. B. M. – *PilarMisto 3.04.11: verificação de pilares mistos de aço e concreto segundo a ABNT NBR 8800:2008 e a NBR 14323:2010*. Belo Horizonte: UFMG, Departamento de Engenharia de Estruturas. Acesso em: 30 maio 2018.