# Modelação da fendilhação por origem térmica de uma barragem de betão em arco

Thermal cracking modelling of a concrete arch dam

Nuno Monteiro Azevedo Eloísa Castilho Noemi Schclar Leitão Luísa Braga Farinha Romano Câmara

### Resumo

No 14º Encontro Internacional de Modelação Numérica em Barragens, organizado pela ICOLD, foi proposta a análise numérica de uma barragem de betão em arco localizada na Suécia sujeita a gradientes térmicos significativos ao longo do ano. Neste artigo apresentam-se os resultados numéricos obtidos com base numa discretização mais refinada do corpo da barragem, quando comparada com o modelo adotado no encontro internacional.

Os resultados da análise mecânica realizada com um modelo de fenda discreta são comparados com as observações *in situ*. Verifica--se que o modelo estrutural mais refinado permite obter resultados mais próximos dos observados, nomeadamente a distribuição de fendilhação no paramento de jusante e o campo de deslocamentos. Analisa-se ainda o efeito das armaduras distribuídas colocadas junto ao paramento de montante e ao paramento de jusante no controlo de deformação e fendilhação.

### Abstract

At the 14<sup>th</sup> International Benchmark Workshop on Numerical Analysis, organized by the ICOLD, the numerical analysis of cracking in a concrete arch dam located in Sweden subjected to high temperature gradients was proposed. In this article the numerical results obtained using a more refined finite element model in the dam body, when compared with that adopted at the benchmark, are presented.

The results of the mechanical numerical analysis carried out using a discrete crack model are compared with in situ observations. It is shown that the model refinement allows a numerical response closer to the data collected in situ, namely the cracking distribution at both the upstream and downstream faces and the dam displacement field. The effect of the steel reinforcement layers located close to the dam upstream and downstream faces, relevant for both deformation and cracking control, is also analysed.

Palavras-chave: Análise térmica / Barragens de betão / Modelo de fenda discreta

Keywords: Thermal analysis / Concrete dams / Discrete crack model

#### Nuno Monteiro Azevedo

Investigador Auxiliar Laboratório Nacional de Engenharia Civil Departamento de Barragens de Betão Lisboa, Portugal nazevedo@lnec.pt

### Eloísa Castilho

Bolseira de Iniciação à Investigação Científica Laboratório Nacional de Engenharia Civil Departamento de Barragens de Betão Lisboa, Portugal. emsantos@lnec.pt

### Noemi Schclar Leitão

Investigadora Principal Laboratório Nacional de Engenharia Civil Departamento de Estruturas Lisboa, Portugal nschclar@lnec.pt

### Luísa Braga Farinha

Investigadora Auxiliar Laboratório Nacional de Engenharia Civil Departamento de Barragens de Betão Lisboa, Portugal Ibraga@Inec.pt

### Romano Câmara

Investigador-Coordenador Laboratório Nacional de Engenharia Civil Departamento de Barragens de Betão Lisboa, Portugal romano@lnec.pt.

### Aviso legal

As opiniões manifestadas na Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

#### Legal notice

The views expressed in the Portuguese Journal of Structural Engineering are the sole responsibility of the authors.

AZEVEDO, N. [*et al.*] – Modelação da fendilhação por origem térmica de uma barragem de betão em arco. **Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas**. Ed. LNEC. Série III. n.º 9. ISSN 2183-8488. (março 2019) 37-44.

# 1 Introdução

Nos países nórdicos as barragens de betão estão sujeitas a gradientes térmicos com uma amplitude anual de 60 °C a 70 °C, motivo pelo qual a grande maioria das barragens se encontra fendilhada. No 14.º Encontro Internacional de Modelação Numérica em Barragens, promovido pela ICOLD, foi proposta a análise de uma barragem de betão em arco localizada na Suécia com o objetivo de se tentar prever numericamente a extensão da fendilhação e os deslocamentos de uma barragem de betão sujeita a gradientes térmicos significativos [1].

Neste artigo optou-se por uma discretização mais refinada, em especial no corpo da barragem, do que a adotada no modelo apresentado no encontro internacional [2]. Tal como em [2], a análise térmica foi realizada com um programa de elementos finitos (*PAT*) que adota uma técnica de diferenças finitas para efetuar a integração temporal. O programa permite utilizar elementos do tipo hexaédrico de 8 nós, 20 nós e 27 nós. As condições de fronteira foram definidas como condições de fronteira de Dirichlet para as interfaces betão/água e fundação/água e condições de fronteira de Robin para as interfaces betão/ar e fundação/ar [3, 4]. A grande maioria das comunicações apresentadas no encontro da ICOLD adotou um modelo de análise térmica similar de base, tendo-se obtido distribuições de temperatura muito semelhantes, apesar de se terem adotado modelos de elementos finitos com diferentes graus de discretização e tipo [1].

A análise mecânica foi realizada com base no programa de elementos finitos Parmac3D [5, 6] que adota um método de solução explícita baseado no método das diferenças centrais e algoritmos de relaxação dinâmica de modo a obter-se a convergência para a solução estática. O módulo computacional permite a adoção de: i) elementos hexaédricos de 8 a 27 nós e elementos tetraédricos; ii) elementos de junta de 3, 4 e 8 nós, iii) elementos de barra ou elementos planos de 3, 4 e 8 nós para simular armaduras de aço distribuídas num dado plano. A não linearidade do material foi modelada ao nível dos elementos de junta com base num modelo de fenda discreta, que segue um modelo de dano bilinear desenvolvido no âmbito da modelação da fratura do betão com o método das partículas [7]. No encontro internacional houve uma grande variedade de abordagens na análise mecânica não linear de natureza contínua, desde modelos elastoplásticos com enfraquecimento exponencial em tração e compressão [8], modelos baseados na teoria do dano [9], modelos de fenda rotativa com base no tensor das deformações total [10] e modelos do tipo microplano [11].

A metodologia de cálculo adotada é similar à seguida em [2]. Assim, os campos de temperaturas correspondentes à máxima temperatura e à mínima temperatura que ocorrem no corpo da barragem foram definidos a partir de uma análise térmica transiente, realizada com o programa *PAT*. De seguida, realizou-se uma análise mecânica, em que após a aplicação do peso da barragem e das cargas equivalentes à pressão hidrostática se aplicaram os gradientes de temperatura extremos definidos com a análise térmica. Para os elementos de junta utilizados na discretização da interface barragem/fundação foi adotado um modelo modificado de Mohr-Coulomb com tensão de tração nula.

Os resultados das análises mecânicas são comparados com as observações *in situ* que foram facultadas aos participantes após o encontro realizado [1]. Comparam-se ainda os resultados numéricos obtidos com os resultados numéricos apresentados em [12], que foram considerados como uma das 4 melhores aproximações numéricas [1]. Analisa-se também, para o modelo de fenda discreta, a importância das armaduras colocadas no paramento de montante e jusante de forma a controlarem a abertura de fendas e a deformação registada.

# 2 Modelo numérico

A barragem de betão em arco analisada localiza-se na Suécia e tem cerca de 36 m de altura, um raio de curvatura de 110 m e 170 m de desenvolvimento do coroamento. Na Figura 1 apresenta-se a geometria da barragem em estudo, bem como uma foto de uma barragem em arco com geometria próxima em que se pode observar o isolamento térmico no paramento de jusante de forma a mitigar o aparecimento de fendilhamento por origem térmica. A barragem em arco apresenta armaduras distribuídas no paramento de montante (#  $\phi$  25 // 30) e de jusante (#  $\phi$  25 // 30 na proximidade do paramento e um nível adicional de armaduras na direção vertical,  $\phi$  25 // 30 a 0,10 m de distância do primeiro nível de armaduras) com um recobrimento de 0,10 m.



a) Foto da barragem tipo com isolamento colocado







Figura 2 Modelo numérico adotado nas análises térmica e mecânica

Na comunicação apresentada no encontro internacional [2] adotou--se, quer para o modelo mecânico quer para o modelo térmico, uma malha com 4188 elementos hexaédricos do 2.º grau (20 nós), sendo a espessura da barragem discretizada com 4 elementos finitos. Em regra, nas comunicações apresentadas [1] adotaram--se discretizações muito mais refinadas, com elementos de volume do tipo tetraédrico ou elementos de volume do tipo hexaédrico do 1.º grau (8 nós). As discretizações variaram entre cerca de 50 000 a 100 000 elementos do tipo hexaédrico de 1.º grau no corpo da barragem, incluindo a zona do descarregador e o encontro da margem esquerda. As discretizações com elementos tetraédricos no corpo da barragem foram ainda mais refinadas com um número de elementos finitos da ordem dos 300 000 elementos.

Neste artigo optou-se por uma discretização mais refinada, em especial no corpo da barragem, do que a adotada no modelo apresentado no encontro internacional [2], de modo a procurar obter uma melhor correlação com os valores observados *in situ* [1].

Assim, adotou-se uma discretização com elementos finitos do tipo hexaédrico de 8 nós com 6 elementos na espessura da barragem. No Quadro 1 apresenta-se um resumo do número de elementos finitos adotado por tipo de elemento. No modelo térmico adotou-se a mesma discretização que no modelo mecânico, sem a consideração dos elementos de junta e dos elementos de armadura planos.

#### Quadro 1 Características dos modelos

| Número<br>de pontos<br>nodais | Número de<br>elementos<br>barragem | Número de Número de<br>elementos elementos<br>fundação de junta |        | Número de<br>elementos<br>planos<br>(armadura) |
|-------------------------------|------------------------------------|---|--------|--|
| 104 878                       | 7568                               | 7382  | 12 346 | 11 944   |

Na Figura 2 apresenta-se o modelo numérico, incluindo os elementos de junta e os elementos planos adotados na discretização. Na representação das armaduras distribuídas, junto aos paramentos de montante e de jusante, adotaram-se elementos finitos planos de 4 nós respeitando-se os valores de recobrimento indicados e as distâncias entre armaduras.

### 2.1 Propriedades dos materiais e condições de fronteira

As propriedades dos materiais adotadas na análise térmica e na análise mecânica foram as definidas no âmbito do encontro internacional [1]. No Quadro 2 apresentam-se as propriedades mecânicas mais significativas. De forma aproximada, considerou---se que os elementos planos que modelam as armaduras de aço apresentam um comportamento elástico seguido de um patamar de cedência para o valor da resistência última das armaduras, de 600 MPa. De referir que, de acordo com o indicado em [1], as armaduras apresentam uma tensão de cedência de 360 MPa.

Quadro 2 Propriedades dos materiais indicadas pela comissão organizadora [1]

| Material          | E<br>[GPa] | v<br>[-] | ρ<br>[kg/m³] | σ <sub>t</sub><br>[MPa] | σ <sub>c</sub><br>[MPa] |
|-------------------|------------|----------|--------------|-------------------------|-------------------------|
| Betão da barragem | 33,0       | 0,20     | 2300         | 2,9                     | 38,0                    |
| Maciço rochoso    | 40,0       | 0,15     | 2700         | -                       | -                       |
| Armaduras de aço  | 200,0      | 0,30     | 7800         | -                       | -                       |

Nas juntas da zona em betão e na interface betão/rocha considera--se a rigidez normal  $(k_n)$  igual a 33,0 GPa/m e a rigidez tangencial  $(k_n)$  igual a 13,2 GPa/m. Na interface betão/rocha adotou-se um modelo modificado de Mohr-Coulomb com tensão de tração nula, coesão de 4 MPa e ângulo de atrito de 45°. As condições de fundação reais fazem com que a ligação betão/rocha tenha o comportamento próximo de uma rótula, translações impedidas e rotações livres, sendo o modelo de interface adotado o que permite que o modelo

numérico tenha um comportamento próximo do real. No modelo apresentado em [2] adotou-se uma discretização plana da interface betão/rocha, e nos modelos apresentados na Figura 2 já se adotou uma ligeira curvatura na zona de interface, tentando-se aproximar esta geometria da real, que apresenta uma geometria próxima de uma superfície cilíndrica [1].

No Quadro 3 apresentam-se os parâmetros resistentes do modelo de enfraquecimento bilinear adotado, em que se admite que cada elemento finito do tipo hexaédrico usado na discretização do corpo da barragem interage com os elementos vizinhos através de elementos de junta. Os valores de coesão, energias de fraturas em modo I e II e o ângulo de atrito não foram especificados no âmbito do encontro internacional. No entanto, o valor de energia de fratura em modo I de 300,0 Nm/m<sup>2</sup> está dentro dos valores limites usualmente adotados em betão de barragens [13], e dentro dos valores adotados nos modelos mecânicos das comunicações apresentadas em [1].

Quadro 3 Parâmetros dos modelos de enfraquecimento – Fenda discreta

| σ <sub>t</sub> | G <sub>,</sub> | C     | G <sub>//</sub> | <i>tan</i> φ |
|----------------|----------------|-------|-----------------|--------------|
| [MPa]          | [Nm/m²]        | [MPa] | [Nm/m²]         |              |
| 2,9            | 300,0          | 8,0   | 2500            | 1,0          |

### 2.2 Procedimento de cálculo

A análise térmica teve como ponto de partida a temperatura de referência indicada de 4 °C. Em seguida realizou-se uma análise transiente desde o estado térmico de referência ao longo do ano mais quente seguida pelo do ano mais frio. Na análise térmica realizada adotou-se uma solução implícita com um passo de cálculo de uma hora. Na análise mecânica aplicou-se, em primeiro lugar, o peso da barragem, seguido da aplicação da carga equivalente à pressão hidrostática em 20 incrementos de carga. Em seguida aplicou-se o mínimo gradiente desde a temperatura de referência de 4 °C correspondente à temperatura mais baixa registada no ano mais frio. Adotaram-se igualmente 20 patamares de carga. Por fim, realizou-se o mesmo procedimento para o gradiente máximo positivo. Em cada patamar de carga adotou-se um método de solução explícito baseado num algoritmo de relaxação dinâmica.

# 3 Barragem de betão em arco – resultados principais

### 3.1 Modelo térmico

As funções para a temperatura do ar e da água, utilizadas na análise térmica, seguem a combinação "ano quente para ano frio" disponibilizadas como dados de entrada [1]. Assumiu-se a temperatura inicial  $t_o = 4$  °C, igualmente distribuída pela estrutura. A Figura 3 mostra a distribuição de temperatura, na secção central da barragem, para o dia mais quente e para o dia mais frio.



(b) Dia mais frio – Ano frio

Figura 3 Distribuição de temperatura na consola central para o ano mais quente e para o ano mais frio

Para validar os resultados obtidos foram comparadas as temperaturas obtidas numa secção suficientemente afastada das fronteiras, de modo a que prevaleça o fluxo unidirecional, com a solução analítica unidirecional apresentada em [14] e que se encontra sumarizada em

[2]. Com este objetivo, os picos de temperatura do ar e da água, para as situações de clima mais quente e mais frio, foram aproximados por uma curva cosseno do tipo:

$$T(x,t) = T_m - T_o \cos\left[\frac{2\pi}{365}(t - t_o)\right]$$
(1)

em que *t* é o tempo, em dias, desde o início do ano,  $T_m$  é a temperatura média anual,  $T_o$  é a semiamplitude da onda anual e  $t_o$  é a fase da onda anual da temperatura. A Figura 4 mostra as curvas utilizadas para cada pico de temperaturas do ar e da água, onde x = 0 representa a face de montante e x = L representa a face de jusante.

Para cada período, a temperatura ao longo da espessura foi determinada aplicando à variação sinusoidal da temperatura do ar e da água a expressão indicada em [14], e adicionando a variação linear entre a temperatura média anual das faces da barragem, Figura 4. No paramento de jusante foi adicionada a espessura fictícia indicada em [14] para considerar a condição de fronteira convectiva. A Figura 5 mostra a comparação entre a solução analítica 1D e os resultados com o modelo transiente de elementos finitos, para a secção central, 14 m abaixo do coroamento, em diferentes dias do ano, durante um ano quente e um ano frio.





De referir que nas comunicações apresentadas no encontro internacional os resultados correspondentes aos modelos adotados para a análise térmica preveem distribuições de temperatura no corpo da barragem muito similares [1]. Identificaram-se algumas diferenças, com pouco significado, entre os resultados obtidos com o modelo em regime permanente, relativamente aos resultados obtidos em regime transiente. Nomeadamente, em regime permanente a distribuição de temperaturas ao longo da espessura tem uma distribuição linear, ao contrário da distribuição em regime transiente. Assim, as diferenças obtidas no modelo mecânico são essencialmente devidas aos diferentes modelos constitutivos considerados para o comportamento do betão e das armaduras, bem como a algumas diferenças nas condições de apoio assumidas pelos diferentes autores.



Figura 5 Comparação entre a solução analítica 1D e os resultados do MEF

#### 3.2 Modelo mecânico

Na Figura 6 apresentam-se os deslocamentos obtidos com o modelo numérico proposto de fenda discreta (FD) na direção montante-jusante, ao longo do arco do coroamento, para a pressão hidrostática (PH), para o máximo gradiente negativo sobreposto à pressão hidrostática (I) e para o máximo gradiente positivo sobreposto à pressão hidrostática (V). Na mesma figura apresentam-se também os resultados obtidos com o modelo numérico proposto em [12] (ET) que foi considerado um dos 4 modelos com resultados mais próximos das observações in situ e, ainda, os deslocamentos observados in situ para uma época de gradiente máximo negativo (inverno de 2011) e para uma época de máximo gradiente positivo (verão de 1963). Observa-se uma muito boa concordância entre os resultados numéricos obtidos e os resultados numéricos apresentados em [12] para os três cenários de carga analisados. Verifica-se igualmente uma boa concordância entre os resultados numéricos obtidos para o máximo e o mínimo gradiente de temperatura e os valores observados in situ. De referir que no modelo numérico apresentado em [2] os valores máximos de deslocamento na época de inverno na direção montante-jusante eram da ordem de 75 mm, superiores ao valor máximo de 60,0 mm obtido com o modelo de fenda discreta (FD).







Figura 7 Deslocamento na direção montante-jusante na consola central – Modelo numérico de fenda discreta com e sem armaduras, modelo proposto em [12] e resultados observados *in situ* [1] Na Figura 7a) apresentam-se os deslocamentos obtidos na direção montante-jusante, na consola central, para as combinações de carga analisadas. Verifica-se uma boa correlação entre os resultados obtidos com o modelo de fenda discreta proposto (FD) e os resultados obtidos com o modelo apresentado em [12]. Verifica-se, no entanto, que as condições admitidas na interface barragem/fundação têm de ser melhoradas pois o modelo prevê um comportamento próximo de um encastramento, ocorrendo fendilhação a montante ao longo dos elementos de junta no topo dos elementos finitos de volume em contacto com a fundação. Da análise da Figura 7a) verifica-se que se obtém uma muito boa correlação com os valores observados in situ na época de inverno. Na época de verão, os deslocamentos obtidos com o modelo numérico são ligeiramente mais baixos, tendo, no entanto, a curva obtida uma evolução próxima da observada in situ. Na Figura 7b) comparam-se os resultados obtidos com o modelo numérico considerando as armaduras distribuídas existentes nos paramentos de montante e jusante e não considerando esta contribuição. Verifica-se que a presença das armaduras distribuídas contribui para uma redução da deformação observada e para uma menor localização da rótula plástica que se tende a criar no arco a aproximadamente 16,4 m de altura. Comparativamente ao modelo apresentado em [2], o qual apresenta um menor grau de refinamento, verifica-se que a deformação nesta zona de deformação localizada é superior ao valor máximo de 48,7 mm obtido no modelo sem armaduras distribuídas ( $\approx 65 \text{ mm em } [2]$ ).



c) Fendilhação observada in situ

Figura 8 Fendilhação – Época de inverno, Paramento de jusante – Modelo numérico de fenda discreta com e sem armaduras e resultados observados *in situ* [1]

Na Figura 8 apresenta-se a fendilhação que ocorre no paramento de jusante no modelo numérico proposto, com e sem armadura distribuída, e a fendilhação que se observa *in situ* na época de

inverno. Verifica-se que o modelo com armadura distribuída prevê um campo de fendilhação mais distribuído e próximo do observado *in situ*, com mais do que um nível de fendas horizontais nos arcos a meia altura e fendilhação horizontal nas zonas próximas da interface rocha/fundação. Tal como esperado, no modelo em que não se consideram armaduras distribuídas observa-se um campo de fendilhação mais localizado, tendo a fenda horizontal no arco intermédio muito maior expressão do que as restantes fendas. O valor máximo de abertura de fendas é de cerca de 10,4 mm no modelo com armadura distribuída e de cerca 15,0 mm no modelo sem armadura distribuída. No modelo numérico proposto em [12], em que se adotou uma energia de fratura em modo I de 280,0 Nm/m<sup>2</sup>, próxima do valor adotado neste trabalho e um modelo contínuo do tipo elastoplástico com enfraquecimento exponencial em tração e compressão [8], obteve-se um valor máximo de abertura de fendas de 7,8 mm. De referir que caso se adotasse uma malha não estruturada com elementos do tipo tetraédrico seria possível obter, com o modelo de fenda discreta, a fendilhação inclinada que se observa em algumas zonas da barragem real.



b) Modelo sem armadura distribuída

Figura 9 Campo de deslocamento ampliado 400 vezes – Época de inverno – Modelo numérico de fenda discreta com e sem armaduras

# 4 Conclusões

Neste artigo é apresentado um procedimento de cálculo térmicomecânico com acoplamento sequencial que permite analisar o comportamento de barragens em arco com esbelteza elevada sujeitas a gradientes térmicos elevados.

Em concordância com a maioria dos participantes do encontro internacional da ICOLD, conclui-se que a metodologia mais apropriada para a determinação dos campos de distribuição de temperatura em barragens de betão se baseia na análise numérica transiente [1]. Verifica-se que com um modelo mecânico de natureza descontinua, fenda discreta, com um grau de discretização maior do que o adotado em [2] é possível obter boas correlações com o observado *in situ* em barragens de betão em arco sujeitas a gradientes térmicos significativos ao longo do ano. Verifica-se igualmente que neste tipo de barragens em arco, com esbelteza elevada, é fundamental que o modelo numérico tenha em consideração as armaduras distribuídas, que em regra existem nos paramentos de montante e jusante para controlo de fendilhação e deformação.

### Agradecimentos

O trabalho que se apresenta é parte do projeto de investigação DAMFA – Soluções de ponta para a avaliação sustentável das fundações de barragens de betão, promovido pelo LNEC.

# Referências

- [1] Theme A "Cracking of a Concrete Arch Dam Due to Seasonal Temperature Variations" (2018). Proc. of the 14th ICOLD International Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams, Editors Richard Malm, Manouchehr Hassanzadeh & Rikard Hellgreen, Organized by ICOLD Technical Committee on Computational Aspects of Analysis and Design of Dams, Stockholm, pp. 17-237.
- [2] Schclar Leitão, N.; Monteiro Azevedo, N.; Castilho, E.; Braga Farinha, L.; Câmara, R. (2018) – "Thermal Cracking Computational Analysis of a Concrete Arch dam". Proc. of the 14th ICOLD International Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams, Editors Richard Malm, Manouchehr Hassanzadeh & Rikard Hellgreen, Organized by ICOLD Technical Committee on Computational Aspects of Analysis and Design of Dams, Stockholm, pp. 107-117.
- [3] Schclar Leitão, N. (2011) "Environmental thermal actions Thermal analysis of Alto Lindoso dam". *Proceedings of the 6th International Conference on Dam Engineering*, Lisbon, Portugal.
- [4] Schclar Leitão, N. (2012) Análise térmica de barragens de betão Ações térmicas ambientais. Relatório LNEC 185/2012-DBB/NMMF.

- [5] Monteiro Azevedo, N.; Lemos, J. (1999) Modelação numérica de estruturas maciças pelo método dos elementos finitos – Formulação e implementação computacional, Relatório LNEC 14/99, pp. 1-104.
- [6] Monteiro Azevedo, N.; Câmara, R. (2015) "Dynamic analysis of concrete dams: fluid structure displacement based interaction models", Vol XXV (4), Dam Engineering, pp. 113-132.
- [7] Monteiro Azevedo, N.; Candeias, M. (2014) "Modulação de cenários de rotura em barragens de gravidade de betão com um modelo discreto de partículas", 5.<sup>as</sup> Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.
- [8] Willam, K. J.; Warnke E. P. (1975) "Constitutive Models for the Triaxial Behavior of Concrete". Seminar on Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses. International Association for Bridge and Structural Engineering. 19: 1-30.
- [9] Mazars J. (1986) "A description of micro-and macroscale damage of concrete structures". *Engineering Fracture Mechanics*, 25(5):729-737.
- [10] Selby, R. G.; Vecchio, F. J. (1993) Three-dimensional Constitutive Relations for Reinforced Concrete. Tech. Rep. 93-02, Univ. Toronto, dept. Civil Eng., Toronto, Canada.
- [11] Bažant, Z.; Oh, B. "Microplane model for progressive fracture of concrete and rock". *Journal of Engineering Mechanics*. 1985 Apr; 111(4): p. 559-582.
- [12] Enzell, J.; Tolstten, M. (2018) "Cracking of a concrete arch dam due to seasonal temperature variations". *Proc. of the 14th ICOLD International Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams*, Editors Richard Malm, Manouchehr Hassanzadeh & Rikard Hellgreen, organized by ICOLD Technical Committee on Computational Aspects of Analysis and Design of Dams, Stockholm, pp. 77-86.
- [13] Brühwiler, E. (1990) "Fracture of mass concrete under simulated seismic action", *Dam Engineering* Vol 1, issue 3, pp 153-176.
- [14] Silveira, A.F. (1961) As variações de temperatura nas barragens. Lisboa: LNEC.