

# *Tension chord model* para cargas alternadas

## Tension chord model for reversal loading

Miguel Sérgio Lourenço  
Miguel Ferreira  
Cristina Oliveira  
João Almeida

### Resumo

A análise de elementos de betão armado sujeitos a acções cíclicas é actualmente realizada com recurso a regras empíricas obtidas através de testes experimentais, sem que exista um modelo de comportamento global e consistente que traduza o comportamento efectivo do material, considerando as regras básicas do equilíbrio e compatibilidade, bem como relações constitutivas dos materiais em separado e em conjunto.

O Tension Chord Model (TCM) é um modelo de análise para simular o comportamento de um elemento de betão armado, considerando, individualmente, as relações constitutivas de ensaios uniaxiais dos materiais aço e betão, e com o comportamento conjunto simulado através de uma lei de aderência rígido-plástica simplificada.

Neste artigo, o TCM é estendido para situações de cargas alternadas e repetidas, apresentando-se comparações entre resultados experimentais e numéricos, de modo a contribuir para que sejam gradualmente utilizados modelos de comportamento fisicamente consistentes no estudo de elementos de betão armado.

### Abstract

The analysis of reinforced concrete elements subject to cyclic loads is currently carried out using empirical rules obtained through experimental tests, without the existence of a global and consistent model able to translate the effective behaviour of the material, considering the basic rules of equilibrium and compatibility, as well as constitutive relationships of the materials separately and together.

The Tension Chord Model (TCM) is an analysis model to simulate the behaviour of a reinforced concrete element, considering, individually, the constitutive relations of uniaxial tests of steel and concrete materials, with the composite behaviour simulated through a simplified rigid-plastic bond law.

In this paper, TCM is extended to situations of reversal and repeated loads, presenting comparisons between experimental and numerical results, aiming to contribute to the gradual use of physically consistent behaviour models in the study of reinforced concrete elements.

**Palavras-chave:** Tension Chord Model / Acções cíclicas / Modelos de comportamento / Betão Estrutural

**Keywords:** Tension Chord Model / Cyclic Actions / Behaviour Models / Structural Concrete

## Miguel Sérgio Lourenço

Eng.º Civil, JSJ, Lda., Prof. Adjunto Conv. IPS  
Instituto Politécnico de Setúbal ESTBarreiro, INCITE  
Setúbal, Portugal  
mlourenco@jsj.pt

## Miguel Ferreira

Eng.º Civil, Grupo NOV, S.A.  
Prof. Adjunto Conv. UC  
Leiria, Portugal  
miguelpedrosaferreira@gmail.com

## Cristina Oliveira

Professora Adjunta  
Instituto Politécnico de Setúbal, ESTBarreiro, INCITE  
Setúbal, Portugal  
cristina.oliveira@estbarreiro.ips.pt

## João Almeida

Eng.º Civil, JSJ, Lda., Prof. Associado IST, CERIS  
Lisboa, Portugal  
jalmeida@civil.ist.utl.pt

### Aviso legal

Os conteúdos incluídos na Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

### Legal notice

*The contents included in the Portuguese Journal of Structural Engineering are the sole responsibility of the authors.*

LOURENÇO, M. [et al.] – Tension chord model para cargas alternadas. **Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas**. Ed. LNEC. Série III. n.º 22. ISSN 2183-8488. (julho 2023) 7-18.

## 1 Introdução

O *Tension Chord Model* (TCM), proposto por Marti et al. 1988, é um modelo de análise que permite simular o comportamento de um elemento de betão armado. Utilizado muitas vezes para a análise do comportamento sob acções monotónicas, este modelo considera, individualmente, as relações constitutivas de ensaios uniaxiais dos materiais aço e betão, sendo o comportamento conjunto simulado através de uma lei de aderência rígido-plástica simplificada. Obtém-se, assim, uma relação constitutiva, esforço axial – extensão média, de um tirante, para forças aplicadas, deformações impostas extrínsecas ou intrínsecas (e.g. retracção). Trata-se de um modelo físico que ao simplificar o comportamento relativo da aderência permite a respetiva simulação através de uma equação diferencial simples e cuja solução analítica é simples de definir.

Neste artigo pretende-se estender o conceito do TCM para situações de cargas alternadas e repetidas, com o objectivo de obter o comportamento de um elemento de betão armado para acções cíclicas apoiado em modelos de comportamento simples e fisicamente consistentes.

A ligação entre betão-aço é influenciada pela história de ciclos de carga-descarga, com alteração de rigidez e estado de deformação, conduzindo a problemas de interpretação de resultados e introduzindo sérias dificuldades na simulação numérica deste comportamento.

Numa primeira fase é abordado um tirante sob acções monotónicas, com um ciclo de carga e descarga, estabelecendo-se uma solução analítica para a resposta. Na fase seguinte, são tratadas as cargas cíclicas. A obtenção de uma solução analítica generalizada, para acções alternadas, é inviabilizada devido ao comportamento não linear dos materiais, sendo, portanto, necessário recorrer a métodos numéricos para obter a resposta cíclica. Através de uma formulação que recorre a um elemento finito linear (1D) para simular o conjunto betão-aço-aderência, em conjunto com modelos reológicos criteriosamente associados em série ou em paralelo que traduzem o comportamento tensão-extensão, consegue-se simular eficazmente o comportamento global cíclico do tirante.

Em todo o processo, desde a formulação analítica para acções monotónicas, até à formulação numérica para as acções cíclicas, foram consideradas deformações impostas e não forças aplicadas, de modo a simular mais facilmente os troços descendentes da resposta global, resultantes das relações constitutivas não lineares do betão.

Por fim, os resultados numéricos foram comparados com ensaios experimentais de modo a validar a formulação proposta.

## 2 Comportamento para acções alternadas monotónicas

A aplicação do TCM, com recurso à simplificação da lei de aderência, que se admitiu rígido-plástica e assumindo que as relações constitutivas individuais dos materiais betão e aço permanecem lineares, permite uma definição analítica do comportamento de um tirante de betão estrutural. Efectivamente, estabelecendo-se as equações de equilíbrio e compatibilidade de um elemento

infinitesimal, e considerando as relações constitutivas dos materiais, betão e aço, isoladamente, obtêm-se as condições apresentadas nas Equações (1) e (2) para a variação das extensões no aço  $\varepsilon_s$  e no betão  $\varepsilon_c$ , onde  $\tau_b$  representa a tensão de aderência,  $\varnothing$  o diâmetro do varão,  $\rho_s = A_s/A_c$  a taxa de armadura e  $E_s$  e  $E_c$  os módulos de elasticidade do aço e betão, respectivamente.

$$\frac{d\varepsilon_s}{dx} = \frac{4\tau_b}{\varnothing E_s}, \quad \frac{d\varepsilon_c}{dx} = \frac{4\tau_b}{\varnothing E_c} \rho_s \quad (1) \text{ e } (2)$$

A extensão deste conceito para uma situação em que existem acções alternadas foi abordada por alguns autores, e.g. Muttoni and Fernandez 2007, para determinar a abertura de fendas em pontes devido ao facto de a estrutura ter estado sujeita a uma acção superior à carga quase-permanente, e Koppitz *et al.* 2014, com o objectivo de obter um modelo analítico geral para situações de carga-descarga e recarga. Também Lourenço 2010, utilizou os conceitos do *Tension Chord Model* para simular o comportamento cíclico de elementos de betão estrutural e aplicou aos Modelos de Campos de Tensões Adaptativos.

Para acções monotónicas alternadas num tirante de betão armado considerando o efeito de uma extensão de tracção aplicada e uma posterior descarga, assume-se que o comportamento do aço é elasto-plástico, com um eventual endurecimento pós-cedência, e que a descarga permanece linear com um declive igual ao seu módulo de elasticidade  $E_s$ . O betão apresenta uma relação constitutiva linear à tracção com declive igual ao seu módulo de elasticidade  $E_c$ , até atingir a sua resistência máxima à tracção, caindo para zero após atingir a extensão correspondente (Marti *et al.* 1998). No que respeita à aderência, esta usualmente toma um valor de  $\tau_{b0} = 2f_{ct}$  para a fase de carga até o aço atingir a tensão de cedência, reduzindo para  $\tau_{by} = f_{ct}$  após a plastificação das armaduras. Durante a descarga verifica-se uma degradação do mecanismo de aderência propondo-se um valor de  $\tau_{bu} = \tau_{b0}/4 = f_{ct}/2$  (Laurent 1999). Os comportamentos dos materiais aço e betão, bem como a lei da aderência encontram-se representados na Figura 1. Poderá ser considerado o efeito da capacidade do betão resistir a tensões de tracção após a abertura da fenda, usualmente simulado através de um processo de energia da fractura, sendo a capacidade resistente à tracção tanto menor quanto maior for a abertura de fendas (ver

Figura 1d), onde  $w_c$  apresenta valores entre 0,15mm a 0,25mm (Muttoni and Fernandez 2007). Este efeito foi desprezado nesta análise para possibilitar soluções analíticas simples. No entanto, a partir do momento em que as relações constitutivas não são lineares, não é possível encontrar uma solução analítica para todas as situações sendo, portanto, necessário recorrer a métodos numéricos para obter a solução do problema.

Verifica-se que, para o caso de deformações impostas extrínsecas e para acções monotónicas, o comportamento de um tirante de betão armado passa por uma fase progressiva de abertura de fendas até se atingir a situação de fendilhação estabilizada. A distância entre fendas  $s_r$  é definida como sendo o dobro da distância entre a secção onde a tensão no betão é nula (secção da fenda) e a secção em que o betão atinge a tensão resistente à tracção  $f_{ct}$  (note-se que  $d\sigma_c/dx = 4\tau_b \rho_s/\varnothing$ ), resultando na Equação (3) (ver Figura 2a).

$$s_r = \frac{f_{ct}\varnothing}{2\tau_b \rho_s} \quad (3)$$

Para a fase de carga, as inclinações dos campos de extensões no aço em cada troço (ver Figura 2b) e c) são dadas pelas Equações (4) e (5). O dobro da distância entre o ponto de variação das tensões de aderência (por se ter atingido a cedência das armaduras) e o consequente ponto angular A no diagrama de extensões no aço, indicadas na Figura 2c), corresponde a  $s_y$  (distância CC' na Figura 2c) e é dada pela equação do segundo grau indicada na Equação (6), sabendo que a extensão imposta extrínseca é dada por  $\varepsilon_e = \delta_e/L$ .

$$i_0 = \frac{4\tau_{b0}}{\varnothing E_s}, \quad i_y = -\frac{4\tau_{by}}{\varnothing E_{sh}} \quad (4) \text{ e } (5)$$

$$\frac{(i_0 - i_y)}{4} s_y^2 - \frac{i_0}{2} s_r s_y + \varepsilon_{sy} s_r + \frac{i_0}{4} s_r^2 - \varepsilon_e s_r = 0 \quad (6)$$

Conhecendo a extensão na fenda  $\varepsilon_{sr}$ , utilizando as relações constitutivas do aço, obtêm-se a correspondente tensão na secção da fenda  $\sigma_{sr}$  através das Equações. (7) e (8) (onde  $\Delta\varepsilon_e = \Delta\varepsilon_e/L$  representa a variação de extensão de tracção imposta e  $\Delta\varepsilon = f_{ct}/2\rho_s E_s$  é a translação do diagrama  $\sigma_{sr};\varepsilon_e$  entre o aço nu e considerando a resistência do betão entre fendas – *tension stiffening*).

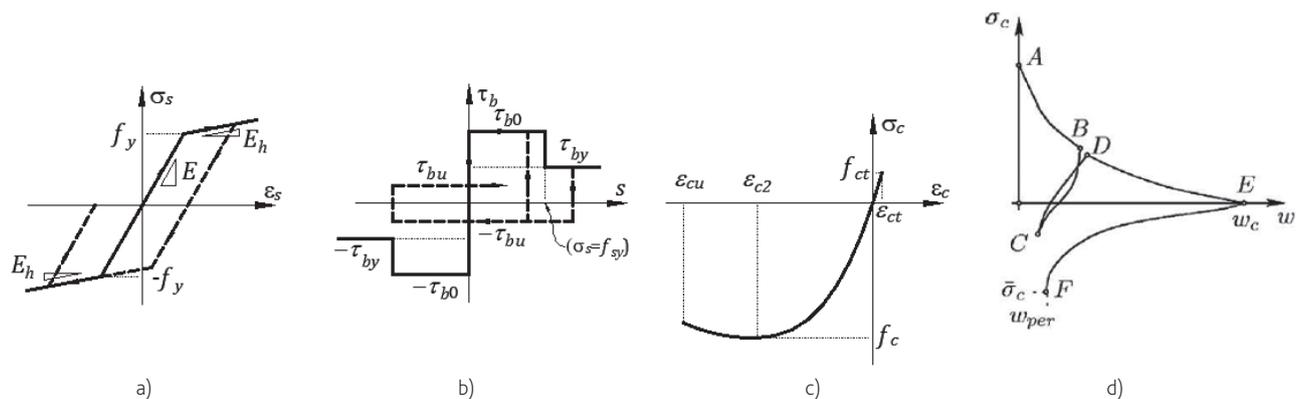


Figura 1 Relações constitutivas para a) aço; b) aderência; c) betão; d) Comportamento do betão à tracção (Muttoni and Fernandez 2007)

$$\text{se } \Delta \varepsilon_e > 0 \wedge 0 \leq \varepsilon_e \leq \varepsilon_{ct} \Rightarrow \varepsilon_{sr} = \varepsilon_e$$

$$\text{se } \Delta \varepsilon_e > 0 \wedge \varepsilon_{ct} \leq \varepsilon_e \leq \varepsilon_{sy} - \Delta \varepsilon \Rightarrow \Delta \varepsilon_{sr} = \Delta \varepsilon_e \quad (7)$$

$$\text{se } \Delta \varepsilon_e > 0 \wedge \varepsilon_{sy} - \Delta \varepsilon < \varepsilon_e \leq \varepsilon_{su} \Rightarrow \varepsilon_{sr} = \varepsilon_{sy} - i_y s_y / 2$$

$$\text{se } \varepsilon_{sr} \leq \varepsilon_{sy} \Rightarrow \sigma_{sr} = E_s \varepsilon_{sr} \quad (8)$$

$$\text{se } \varepsilon_{sr} > \varepsilon_{sy} \Rightarrow \sigma_{sr} = f_{sy} + (\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{sy}) E_{sh}$$

Aquando da descarga e se esta ocorrer ainda no troço elástico, as tensões no aço na secção da fenda reduzem, invertendo o sentido das tensões de aderência (ver Figura 2a). O diagrama de extensões apresenta o andamento indicado na Figura 2b), sendo a inclinação do diagrama de extensões na vizinhança da fenda dado por  $i_u$  (Equação (9)) até atingir a recta das extensões que foi definida no instante da descarga (linha AC na Figura 2b). A distância  $s_u$  (entre B e B' na Figura 2b), pode ser determinada pela Equação (10) sendo  $\Delta \varepsilon_e = \varepsilon_{e,un} - \varepsilon_e$  a variação de extensão imposta na descarga desde o instante em que se inverteu o sentido da deformação, e a extensão na fenda  $\varepsilon_{sr}$  dada pela expressão indicada na Equação (11). O diagrama  $\sigma_{sr}$ ;  $\varepsilon_e$  (ver Figura 3a) é dado assim por uma curva, passando a linear, com inclinação paralela à fase da carga, quando a distância  $s_u$  atinge a distância entre fendas  $s_r$  (ver diagrama inferior da Figura 2b). A tensão é dada pela Equação (12) permitindo definir analiticamente a curva de descarga.

$$i_u = \frac{4\tau_{bu}}{\phi E_s} \quad (9)$$

$$s_u^2 = \frac{4\Delta \varepsilon_e s_r}{(i_o - i_u)} \quad (10)$$

$$\text{se } \Delta \varepsilon_e < 0 \wedge \varepsilon_{sr,un} \leq \varepsilon_{sy} \Rightarrow \varepsilon_{sr} = \varepsilon_{sr,un} + (i_o - i_u) s_u / 2 \quad (11)$$

$$\sigma_{sr} = \sigma_{sr,un} + E_s (\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{sr,un}) \quad (12)$$

Caso a descarga ocorra após a cedência das armaduras, o diagrama de extensões é ligeiramente mais complexo e é caracterizado por três etapas distintas. A inclinação das extensões na vizinhança da fenda é dada pela Equação (13). A primeira etapa é definida pela transição da extensão  $\varepsilon_{e,un}$  para uma extensão  $\varepsilon_{e1}$ , correspondente à situação em que a recta definida pela inclinação  $i_{uy}$  encontra a recta com inclinação  $i_y$  (diagrama imediatamente anterior à descarga). Nesta fase, a distância  $s_u$  é determinada pela Equação (14) e a extensão na fenda  $\varepsilon_{sr}$  dada pela expressão indicada na Equação (15).

$$i_{uy} = i_y - i_o - i_u \quad (13)$$

$$s_u^2 = \frac{4\Delta \varepsilon_e s_r}{(i_y - i_{uy})} \leftarrow \varepsilon_e > \varepsilon_{sy} - \Delta \varepsilon \quad (14)$$

$$\text{se } \Delta \varepsilon_e < 0 \wedge \varepsilon_{sr,un} > \varepsilon_{sy} \Rightarrow \varepsilon_{sr} = \varepsilon_{sr,un} + (i_y - i_{uy}) s_u / 2 \quad (15)$$

A segunda etapa consiste na transição de C/C' para E/E', ocorrendo uma inversão do sentido da aderência, caracterizada pela inclinação  $i_u$  dada pela Eq. (9) até intersectar a recta com inclinação  $i_o$ . Neste

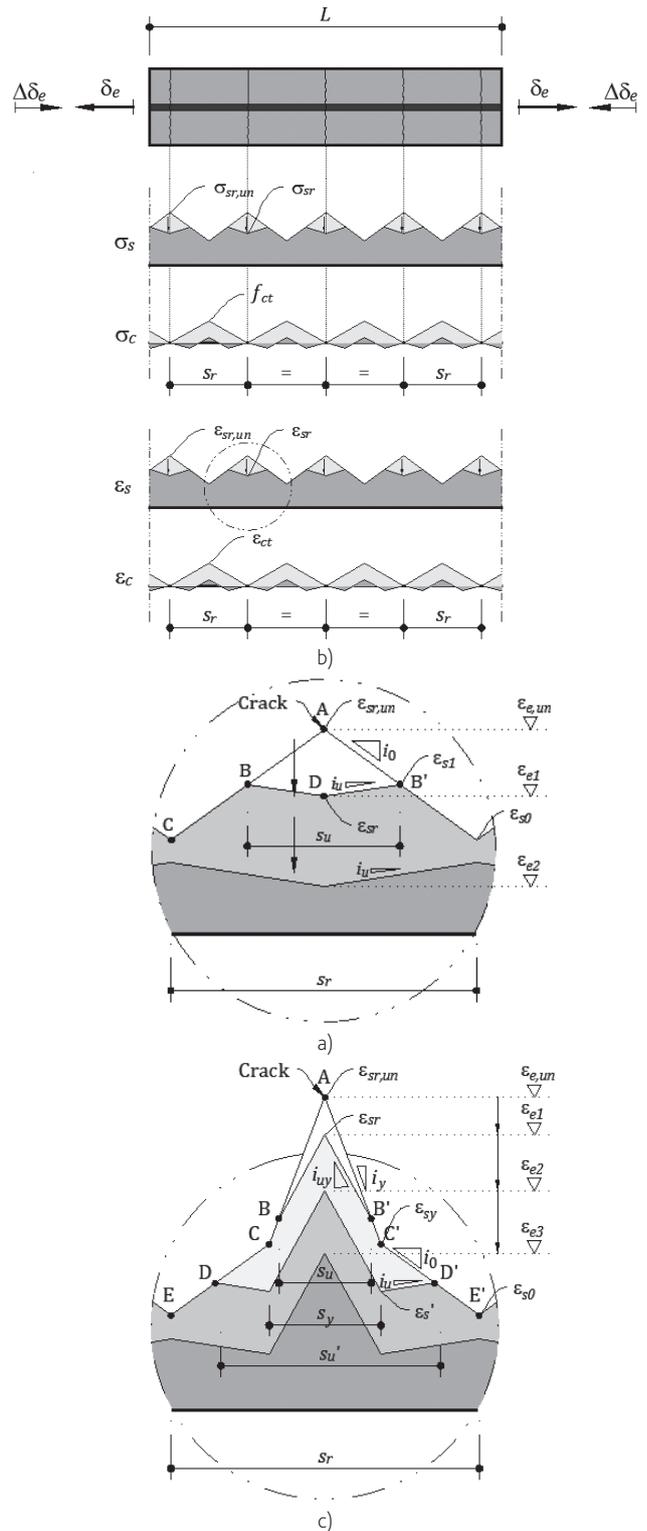


Figura 2 Processo de fendilhação na descarga de deformação extrínseca: a) vista global; b) descarga na fase elástica; c) descarga após a cedência de armaduras

caso, a distância  $s'_u$  é dada pela resolução do sistema de equações indicado nas Equações (16) a (18), conduzindo igualmente a uma equação com solução analítica. Por fim, a terceira etapa corresponde a uma relação linear e paralela ao patamar de carga (ver Figura 3b).

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{sr} - i_{uy} s_y / 2 \quad (16)$$

$$\frac{\varepsilon_{sr,um} - \varepsilon_{sr} + \varepsilon_{sy} - \varepsilon'_s}{2} s_y + \frac{\varepsilon_{sy} - \varepsilon'_s}{2} (s_u - s_y) = \frac{\Delta \varepsilon_e}{2} s_r \quad (17)$$

$$\varepsilon'_s + i_u \frac{(s_u - s_y)}{2} = \varepsilon_{sy} + i_0 \frac{(s_u - s_y)}{2} \quad (18)$$

A aplicação das equações apresentadas anteriormente conduz aos diagramas apresentados na Figura 3 para as descargas nas fases elástica e plástica. Note-se que este aspecto pode ter especial interesse na avaliação de aberturas de fendas em estruturas que estiveram sujeitas a acções que conduziram a uma tensão  $\sigma_{max}$  superior à tensão provocada pela acção quase permanente  $\sigma_{qp}$ , conduzindo a uma extensão  $\varepsilon_{qp}$  superior à calculada caso se tratasse de um 1.º carregamento ( $\varepsilon'_{qp}$ ).

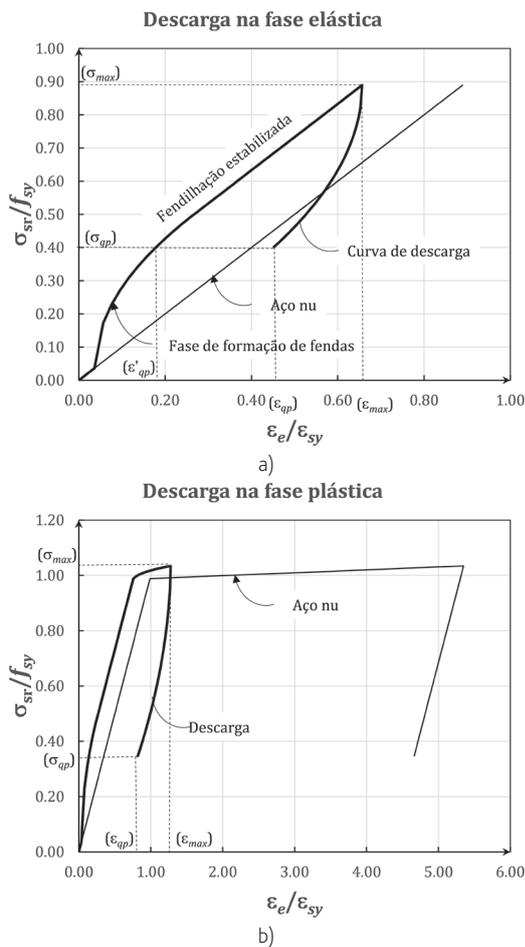


Figura 3 Relações tensão-deformação com: a) descarga na fase elástica; b) descarga na fase plástica

### 3 Comportamento para acções cíclicas

#### 3.1 Considerações iniciais

A modelação analítica de curvas de carga e descarga repetidas, na maioria das situações, reveste-se de grandes dificuldades de implementação. As equações a adoptar dependem dos níveis de extensão ou de tensão, na carga ou na descarga, conduzindo à necessidade de existirem diversas equações, com o risco inerente de aumentar a probabilidade de erro e não abranger todos os casos particulares. Usualmente, utilizam-se expressões empíricas ou semi-empíricas obtidas em ensaios experimentais (CEB 1996 e Vecchio 1999).

Aqui, procurou-se desenvolver um modelo que utilizasse conceitos físicos simples e consistentes através de modelos reológicos, associando em série ou em paralelo diversos componentes com um comportamento físico simples e perfeitamente definido, como desenvolvido por Ferreira 2021, para se obter uma aproximação a qualquer curva  $\sigma: \varepsilon$  real, correspondendo a um modelo de engenharia elegante. Em complemento, o número de parâmetros a introduzir é muito reduzido para caracterizar qualquer curva numérica. A utilização deste tipo de modelos, além de simplificar, de forma decisiva, a modelação das curvas histeréticas, é de implementação numérica muito simples.

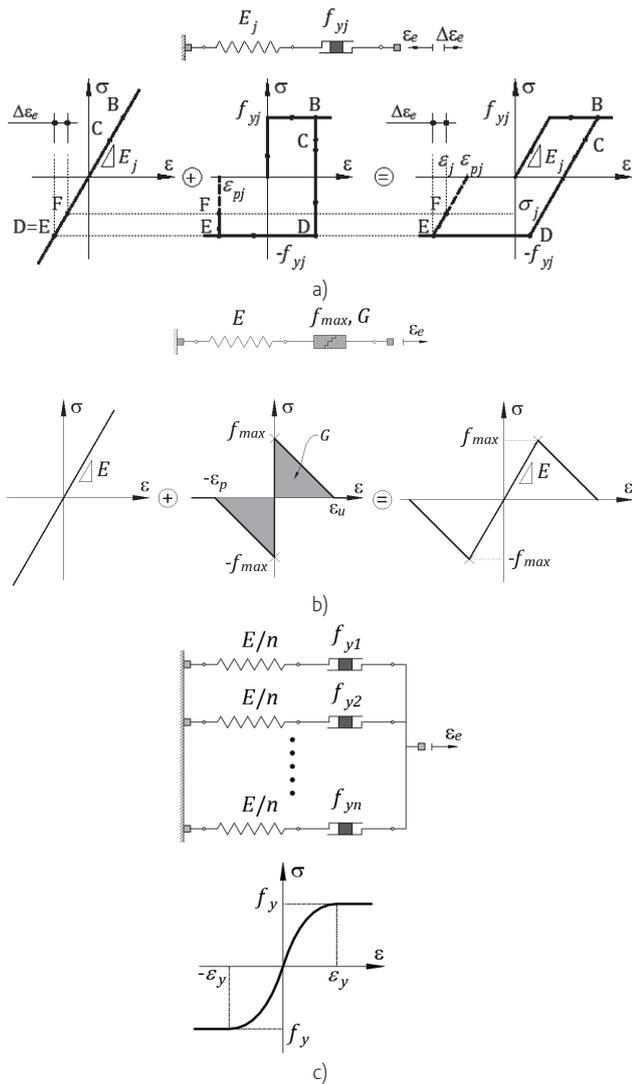
#### 3.2 Componentes reológicas

Para uma determinada extensão imposta extrínseca  $\varepsilon_e$ , a distribuição de tensões e extensões depende do tipo de associação das componentes. Para aproximar uma relação constitutiva não-linear genérica, basta efectuar a associação em paralelo de vários conjuntos de componentes com comportamento elasto-plástico perfeito (ver Figura 4a), resultando o comportamento não-linear da Figura 4c) para  $n$  associações. Neste sistema, para uma extensão imposta  $\varepsilon_e$ , cuja tensão nos componentes elásticos ainda não atingiram a correspondente tensão de cedência  $f_{yj}$ , a rigidez do sistema global é dada pela soma da rigidez dos componentes em paralelo. Assim que um dos conjuntos de componentes atinge a tensão de cedência, a sua rigidez é nula pois toda a extensão é absorvida pela componente rígido-plástica, restando apenas a rigidez dos restantes conjuntos que ainda não atingiram a tensão de cedência, conduzindo a uma redução da rigidez global do sistema.

O módulo de elasticidade  $E_j$  e a tensão de cedência  $f_{yj}$  de cada componente  $j$ , elástico e plástico, respectivamente, tal como sugerido por Ferreira 2021, pode ser dado pelas Equações (19).

$$E_j = \frac{E}{n}; \quad f_{yj} = \frac{j^k}{\sum_j j^k} f_y \quad (19)$$

A simulação de um troço descendente numa relação constitutiva, pode ser definida através de uma energia de fractura, cujo componente reológico associado depende da tensão máxima, da extensão final e do comprimento desse elemento. A associação desse componente com uma mola, conforme ilustrado na Figura 4b) conduz ao comportamento indicado na mesma figura.



**Figura 4** Associação de componentes para comportamentos: a) elasto-plástico; b) comportamento cíclico; c) elasto-plástico não linear; d) simulação de troços descendentes (adaptado de Ferreira 2021)

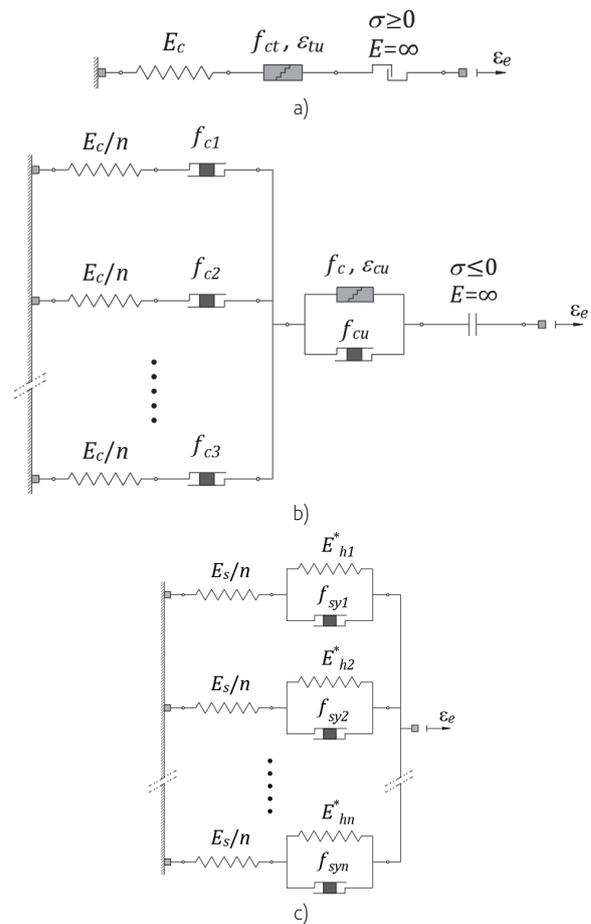
Adicionalmente, é necessário conhecer algumas variáveis de estado para simular o comportamento cíclico, nomeadamente o ponto de descarga de cada componente (ponto B na Figura 4a) ou, em alternativa, a extensão plástica  $\epsilon_{pj}$  quando o componente é totalmente descarregado (equivalente a  $\sigma_j = 0$  – ver Figura 4a). Na descarga, a passagem do ponto B para o ponto C na Figura 4a), conduz a um decréscimo da extensão no componente elástico, com conseqüente redução de tensão global. No que respeita à recarga, as extensões em cada componente e no sistema conjunto passam pelo ponto D, até atingir o ponto E na Figura 4a). A recarga corresponde a uma variação de extensão imposta positiva, passando do ponto E para o ponto F, com o funcionamento de cada componente idêntico à fase da descarga. Assim, a extensão plástica em cada componente pode ser relacionada com a extensão imposta  $\epsilon_e$  e com

a correspondente tensão  $\sigma_j$  através da Equação (20).

$$\epsilon_{pj} = \epsilon_e - \frac{\sigma_j}{E_j} \quad (20)$$

### 3.3 Relações constitutivas cíclicas do betão, aço e aderência

O betão apresenta um comportamento não linear à compressão com redução da tensão resistente após o pico da tensão máxima. Para a tracção, o comportamento é praticamente linear até atingir a tensão resistente à tracção, com um troço descendente, associado a uma energia da fractura. Os modelos reológicos para simularem o comportamento do betão à tracção e à compressão são apresentados na Figura 5 a) e b). Para a compressão, foram considerados  $n = 8$  conjuntos de ligações em série de uma componente elástica e uma componente rígido-plástica. Para simular o dano no betão após atingir a tensão máxima, foi incluída, em série, uma ligação em paralelo de um componente de energia da fractura com  $\epsilon_{cu} = 3,5\%$  limitando a uma tensão residual última de  $f_{cu}$  através do componente rígido-plástico.



**Figura 5** Modelos reológicos para a) betão à tracção; b) betão à compressão; c) aço

Relativamente ao aço, foi considerado um conjunto de  $n = 8$  associações em série de um componente elástico com um componente em paralelo de uma mola e um componente rígido-plástico, de modo a simular o endurecimento pós-cedência do aço. Os módulos de elasticidade e tensões de cedência descritos seguiram o definido nas Equações (19) e  $E_{sj}^*$  é calibrado de modo que cada componente tenha um módulo de endurecimento de  $E_{hj} = E_h/n$ , resultando  $1/E_{hj}^* = 1/E_{hj} - 1/E_{sj}$ .

A tensão  $\sigma_j$  em cada conjunto de componentes indicados na Figura 5 pode ser dada pela Equação (21), sendo a tensão final dada pela soma das tensões em cada componente. O comportamento cíclico pode ser perfeitamente definido por estas associações de componentes, necessitando apenas de conhecer a variável de estado  $\varepsilon_p$ , sendo que a descarga e a recarga são caracterizadas por curvas com iguais declives e com a rigidez paralela à carga.

$$\sigma_j = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} E_j \cdot (\varepsilon_e - \varepsilon_{p,i} - 1) \\ f_y + E_{hj} \cdot (\varepsilon_e - \varepsilon_y); \\ -f_y - E_{hj} \cdot (\varepsilon_e - \varepsilon_y) \end{array} \right. \\ \sigma = \sum_{j=1}^n \sigma_j \end{array} \right. \quad (21)$$

O comportamento cíclico obtido numericamente para o betão e aço, com estes modelos reológicos, para ciclos de carga, descarga e recarga, pode ser observado na Figura 6.

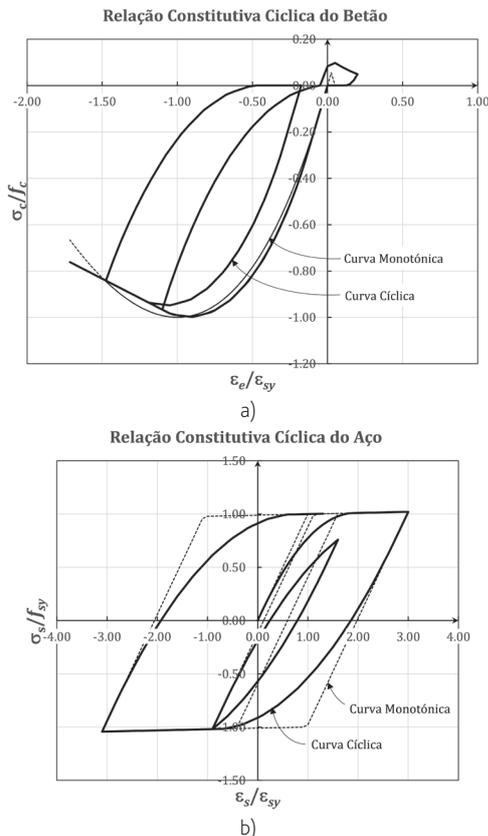


Figura 6 Aplicação de modelos reológicos para os comportamentos a) betão e b) aço

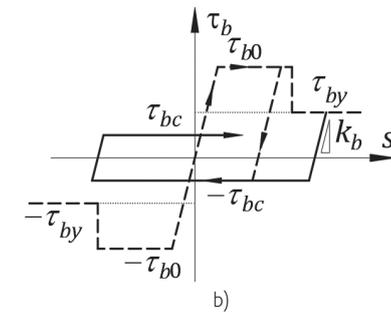
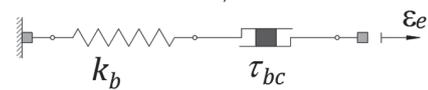
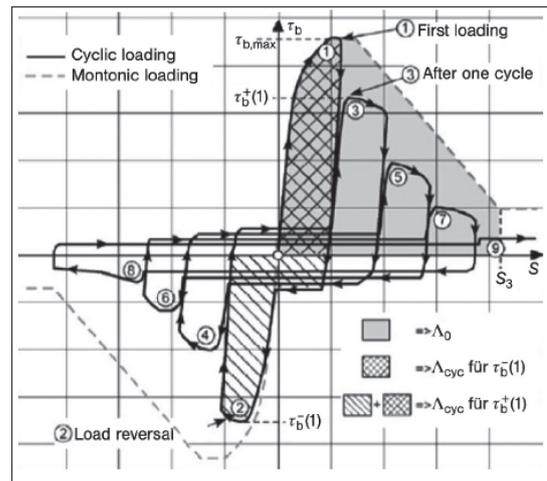


Figura 7. a) Comportamento cíclico da aderência como definido no MC 2010; b) modelo reológico para a consideração da aderência

No que respeita à aderência, verifica-se que a tensão tangencial resistente apresenta uma forte degradação após poucos ciclos de carga. Efectivamente, de acordo com o Model Code 2010 (ver Figura 7a) a tensão de aderência reduz para cerca de 1/8 da tensão de pico do primeiro carregamento, a que corresponde a uma tensão de aderência de cerca de  $\tau_{bc} = f_{ct}/2$ . Para efeitos de modelação numérica da aderência é também necessário considerar uma rigidez no diagrama tensão-escorregamento, que, de acordo com Ferreira 2021, deverá ser tomado como  $k_b = 200$  MPa/mm (Figura 7b).

### 3.4 Elemento finito de aço/betão/aderência

Para simular o comportamento de um elemento de betão armado sujeito a ações cíclicas, Ferreira 2021 propõe a formulação do problema baseado num elemento finito de barra 1D que contém o aço ( $s$ ), o betão ( $c$ ) e a aderência ( $b$ ), contendo 4 graus de liberdade locais, conforme se ilustra na Figura 8. Assumindo que o aço e o betão têm um módulo de elasticidade e área de  $E_s$ ,  $A_s$ ,  $E_c$  e  $A_c$ , respectivamente, e que a aderência é simulada com uma rigidez inicial  $k_b$ , a matriz de rigidez elementar resulta na Equação (22)

sendo  $\varnothing$  o diâmetro do varão e  $L_{el}$  o comprimento do elemento finito  $e_l$ .

$$k_{el} = \begin{pmatrix} \frac{E_s A_s + k_b \pi \varnothing \frac{L_{el}}{2}}{L_{el}} & -\frac{E_s A_s}{L_{el}} & k_b \pi \varnothing \frac{L_{el}}{2} & 0 \\ -\frac{E_s A_s}{L_{el}} & \frac{E_s A_s + k_b \pi \varnothing \frac{L_{el}}{2}}{L_{el}} & 0 & -k_b \pi \varnothing \frac{L_{el}}{2} \\ -k_b \pi \varnothing \frac{L_{el}}{2} & 0 & \frac{E_c A_c + k_b \pi \varnothing \frac{L_{el}}{2}}{L_{el}} & -\frac{E_c A_c}{L_{el}} \\ 0 & -k_b \pi \varnothing \frac{L_{el}}{2} & -\frac{E_c A_c}{L_{el}} & \frac{E_c A_c + k_b \pi \varnothing \frac{L_{el}}{2}}{L_{el}} \end{pmatrix} \quad (22)$$

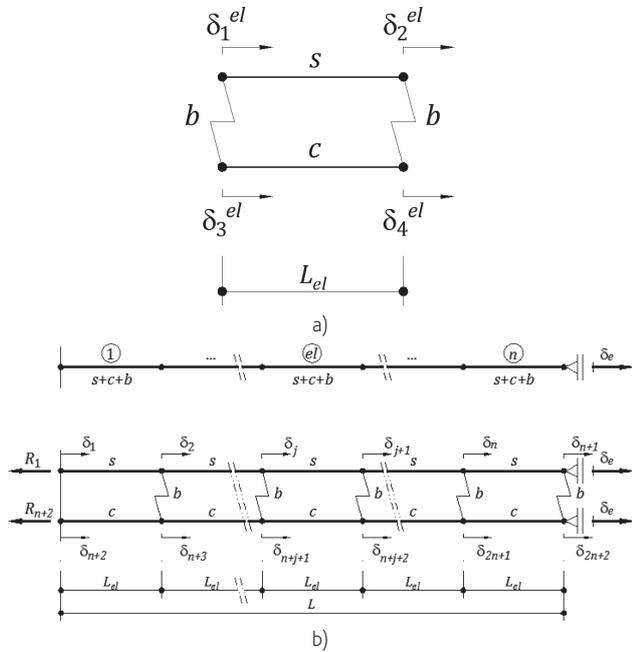


Figura 8 a) Elemento finito de aço/betão/aderência b) Elemento genérico com  $n$  elementos finitos de comprimento  $L_{el}$

A matriz de rigidez global de um elemento genérico pode ser facilmente obtida relacionando os graus de liberdade locais com os graus de liberdade globais de um elemento finito,  $el$ , dividido em  $n$  elementos finitos de comprimento  $L_{el}$  sabendo que a incidência de cada grau de liberdade local é dada pelas Equações (23).

$$\delta_1^{el} = \delta_{el}, \quad \delta_2^{el} = \delta_{el+1}, \quad \delta_3^{el} = \delta_{n+1+el}, \quad \delta_4^{el} = \delta_{n+2+el} \quad (23)$$

O sistema governativo é dado pela condensação da matriz de rigidez global  $K_g$  com uma matriz  $C$  que tem um valor unitário nos graus de liberdade restringidos e zero nos restantes. Os vectores  $\delta$  e  $R$  correspondem aos deslocamentos dos nós e às reacções de apoio, respectivamente. Por fim, o vector  $\delta_e$  refere-se aos deslocamentos impostos nos graus de liberdade correspondentes (ver Equação (24)).

$$Kd = F \Leftrightarrow \begin{bmatrix} K_g & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_e \end{bmatrix} \quad (24)$$

### 3.5 Formulação do Problema

O sistema foi resolvido incrementalmente pelo método de Newton-Raphson modificado. Assim, a matriz de rigidez mantém-se constante durante o processo iterativo, reduzindo o esforço numérico do cálculo da matriz tangente, com o inconveniente de serem necessárias mais iterações para obter a convergência, mas com a vantagem de ser mais estável na passagem de patamares na curva da resposta. O processo incremental consiste na resolução do sistema apresentado nas Equações (25) e (26), onde  $i$  representa as iterações para um determinado patamar de carga. O processo iterativo termina quando a norma do vector  $\Delta d$  é tão pequeno quanto se deseje ( $\epsilon_\epsilon = 5 \times 10^{-6}$  e  $\epsilon_\sigma = 5 \times 10^{-3}$ ). Resolvendo o sistema de equações, são determinados os deslocamentos e reacções para a iteração  $(i + 1)$ , calculando-se as correspondentes extensões no aço e no betão. Aplicando as relações constitutivas não lineares, determinam-se as tensões e as correspondentes forças no aço, betão e de aderência, o que permite montar o novo vector das forças interiores  $F_{int}^{i+1}$  e retornar ao sistema de equações inicial, ver Equações (27) a (29).

$$K \Delta d^{(i+1)} = F_{ext} - F_{int}^{(i)} \quad (25)$$

$$d^{(i+1)} = d^{(i)} + \Delta d^{(i+1)} \rightarrow \epsilon_s^{(el)}, \epsilon_c^{(el)} \rightarrow \sigma_s^{(el)}, \sigma_c^{(el)}, \sigma_b^{(el)} \rightarrow N_s^{(el)}, N_c^{(el)}, F_b^{(el)} \rightarrow F_{int}^{(i+1)} \quad (26)$$

$$\epsilon_s^{(el)} = \frac{(\delta_{j+1} - \delta_j)}{L_j}, \epsilon_c^{(el)} = \frac{(\delta_{n+j+2} - \delta_{n+j+1})}{L_j}, s_1^{(el)} = \delta_{n+j+2} - \delta_{n+j+1}, s_2^{(el)} = \delta_{n+j+1} - \delta_j \quad (27)$$

$$\sigma_s^{(el)} = f(\epsilon_s^{(el)}), \sigma_c^{(el)} = f(\epsilon_c^{(el)}), \tau_{b1}^{(el)} = f(s_1^{(el)}), \tau_{b2}^{(el)} = f(s_2^{(el)}) \quad (28)$$

$$F_{int,s} = A_s \sigma_s^{(el)}, F_{int,c} = A_c \sigma_c^{(el)}, F_{int,b1} = \tau_{b1} \pi \varnothing L_j / 2, F_{int,b2} = \tau_{b2} \pi \varnothing L_j / 2 \quad (29)$$

A Figura 9 apresenta os resultados obtidos para a modelação numérica de um tirante de betão armado.

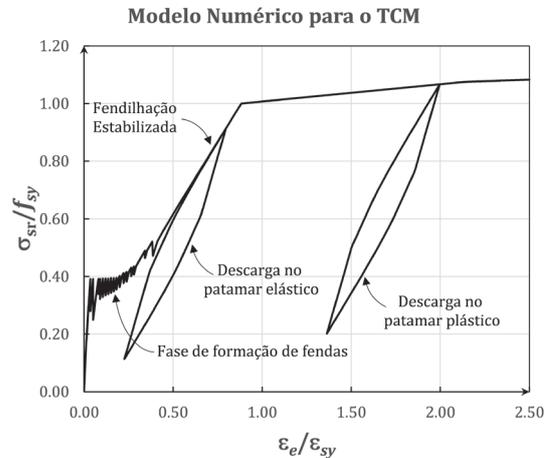


Figura 9 Aplicação do modelo numérico

## 4 Comparação com resultados experimentais

### 4.1 Cargas monotónicas

Os resultados numéricos foram comparados com ensaios experimentais de modo a validar a metodologia proposta. Foram, em particular, analisados os ensaios elaborados por Kenel and Marti 2002 e Kenel *et al.* 2005 de uma viga de betão armado com um troço em consola em cada extremidade e dois apoios intermédios, ambos com 1,2m de vão, sendo a carga aplicada nas extremidades da consola, conduzindo a uma situação de momento constante entre apoios e, consequentemente, a uma tracção constante na corda superior (Figura 10).

Os resultados experimentais foram comparados com os obtidos numericamente em diversos patamares de carga, descarga e recarga (ver Figura 11): um primeiro ciclo a que corresponde um nível de carga de  $Q = 32$  kN (LS5), seguido de uma descarga para  $Q = 3$  kN (LS6) e uma posterior recarga  $Q = 32$  kN (LS7). No segundo ciclo, o início da descarga ocorre a  $Q = 44$  kN (LS10), próximo da carga de cedência  $Q_y \approx 45$  kN, até uma acção de

$Q = 3$  kN (LS11), retomando uma recarga até  $Q = 44$  kN (LS12) tendo-se obtido uma carga de rotura do provete a  $Q_u = 53,7$  kN. Apenas são apresentados resultados experimentais de uma zona com 600 mm de comprimento, com coordenadas de 1,8 m a 2,4 m, pelo que os resultados numéricos correspondem também a um troço de 600 mm, embora tenha sido simulado numericamente o comprimento total do tirante com 1200 mm. O tirante foi sub-dividido em 120 elementos finitos, tendo-se considerado as mesmas características mecânicas do aço e do betão que no ensaio que estão indicadas na Figura 10. Quanto à aderência considerou-se um valor de  $\tau_{b0} = 2f_{ct}$  para o primeiro carregamento, que definiu o espaçamento entre fendas, seguindo-se um valor de  $\tau_{bu} = f_{ct}$  para as descargas e recargas posteriores. Considerou-se uma variabilidade aleatória para a resistência à tracção do betão de 30%, *i.e.*,  $0,7f_{ct} \leq f_{ct} \leq 1,3f_{ct}$ .

Foram também comparados os resultados em termos globais de carga  $Q$  vs deslocamento  $w_m$ , obtidos experimentalmente (Figura 10 d) com os numéricos (ver Figura 12). Conforme se pode observar, os resultados numéricos apresentam uma óptima concordância com os resultados experimentais, validando a metodologia proposta para simular um elemento de betão armado para acções monotónicas alternadas

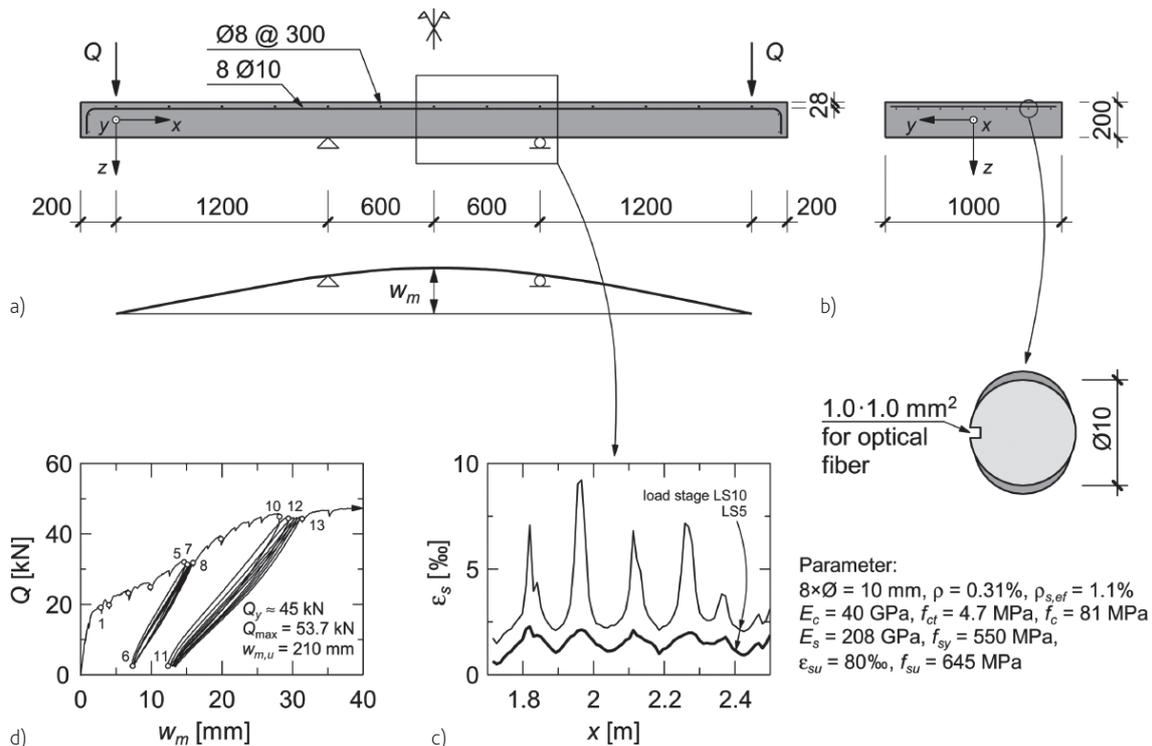


Figura 10 Ensaios realizados por Kenel and Marti 2002 e Kenel *et al.* 2005

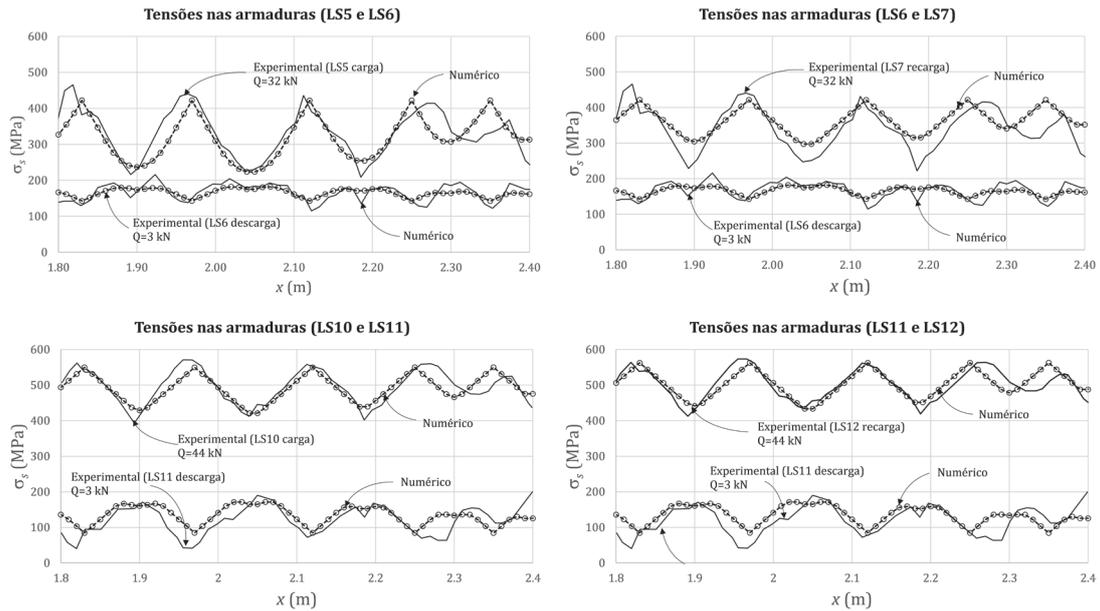


Figura 11 Comparação entre resultados experimentais e numéricos – várias situações de carga, descarga e recarga

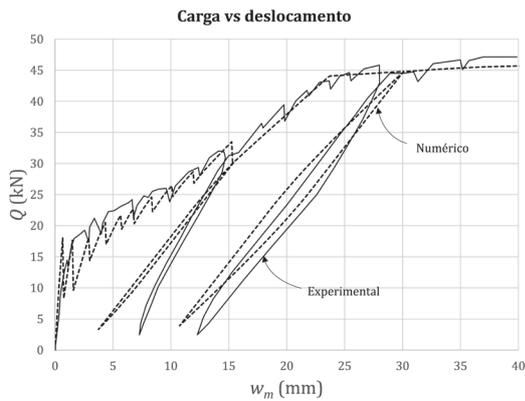


Figura 12 Comparação entre resultados experimentais e numéricos – carga vs deslocamento

## 4.2 Cargas cíclicas

A metodologia apresentada foi também comparada com resultados experimentais para acções pseudo-cíclicas desenvolvidos por Germano 2008. O teste consistia numa estrutura triangular em que o actuador aplica uma carga horizontal em ambos os sentidos no vértice superior, gerando alternadamente tracções e compressões nas diagonais (Figura 13). A história do carregamento foi baseada nas recomendações correntes para este tipo de ensaio, consistindo em três repetições da mesma carga, para três níveis de carga, proporcionais ao deslocamento que conduz à cedência das armaduras (ver Germano 2008).

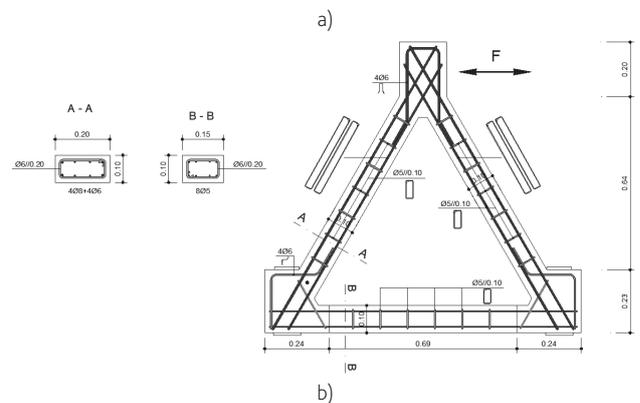
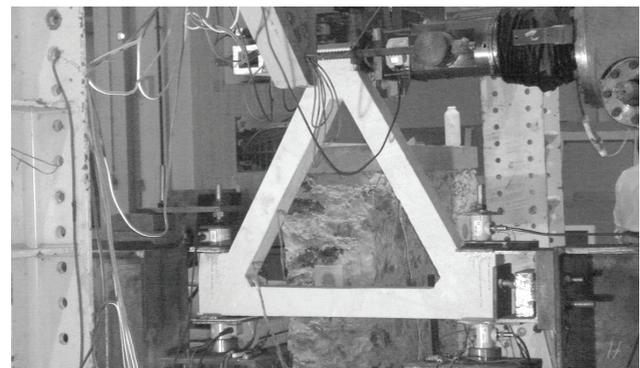


Figura 13 a) vista do sistema do ensaio; b) pormenorização (Germano 2008)

As características mecânicas dos materiais obtidas nos ensaios foram as a seguir indicadas, tendo-se adoptado os mesmos valores para a análise numérica. No que respeita à tensão de aderência para a análise numérica, considerou-se um valor de  $\tau_{bc} = 1,4$  MPa.

$E_s = 200$  GPa;  $E_h = 1,24$  GPa;  $f_{sy} = 528$  MPa;  $f_{su} = 674$  MPa;  
 $A_s = 314$  mm<sup>2</sup>;  $\varnothing = 8$  mm;  $\epsilon_{su} = 0,120$

$E_c = 31,2$  GPa;  $f_c = -32,0$  MPa;  $f_{ct} = 2,5$  MPa;  $A_c = 0,02$  m<sup>2</sup>;  
 $\epsilon_{c1} = -0,0022$ ;  $\epsilon_{cu} = -0,0035$

Os resultados dos ensaios e os obtidos numericamente são apresentados na Figura 14 para dois ciclos distintos do mesmo ensaio, onde se verifica uma boa concordância. Embora não se tenha obtido uma perfeita correspondência, confirma-se que a generalidade do comportamento cíclico está bem simulada com o modelo numérico proposto.

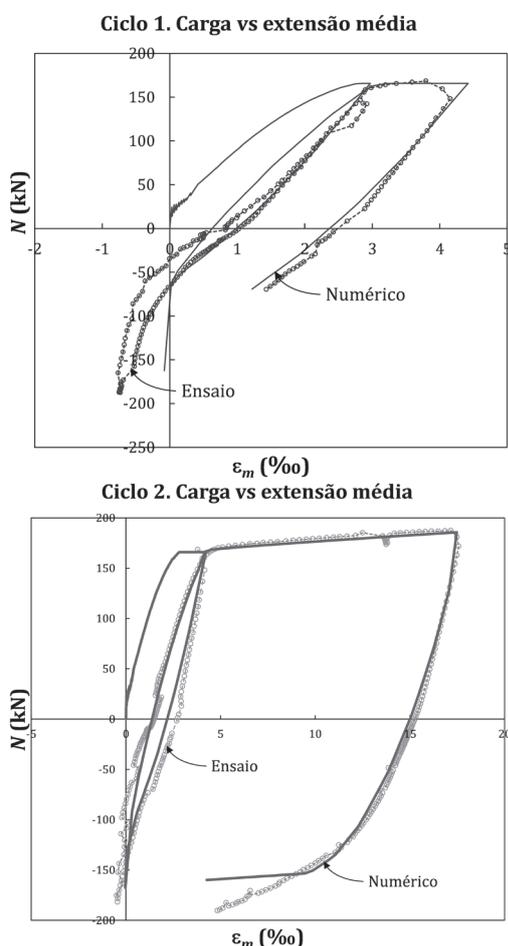


Figura 14 Comparação entre resultados experimentais e numéricos para 2 ciclos distintos

## 5 Conclusões

No presente artigo apresentou-se uma metodologia que utiliza o conceito do *Tension Chord Model* (TCM) para simular

o comportamento de elementos de betão armado sob acções alternadas e cíclicas. Inicialmente foram determinadas expressões analíticas para situações de carga e descarga, e, posteriormente, desenvolveu-se uma técnica numérica para generalizar o conceito para acções cíclicas. O processo numérico consistiu na subdivisão do elemento de betão armado em diversos subelementos finitos que simulam o aço, o betão e a aderência isoladamente. A metodologia proposta foi comparada com resultados experimentais para validação da técnica numérica proposta, tendo-se obtido resultados muito satisfatórios.

Esta ferramenta pode ser utilizada em todos os processos numéricos que pretendam incluir o comportamento não-linear cíclico do betão armado, quer sejam técnicas que utilizem macro-elementos (e.g. modelos de campos de tensões adaptativos propostos por Lourenço 2010 ou modelos de 3 campos proposto por Ferreira *et al.* 2022) ou que utilizem micro-elementos (e.g. o método dos elementos finitos não lineares proposto por Fernandez e Muttoni 2007, Mata-Falcon *et al.* 2018 e Ferreira 2021 ou modelos de elementos finitos baseados no teorema estático e análise limite proposto por Vestergaard *et al.* 2021).

Com esta formulação baseada em modelos reológicos, cada componente apresenta um comportamento simples, com um significado físico claro. Esta abordagem apresenta enormes vantagens, pois a relação constitutiva passa a ser baseada em modelos físicos simples que, quando adequadamente associados, simulam eficazmente o comportamento global cíclico do material. Deste modo, considera-se que a utilização de modelos reológicos através da associação de componentes para simular o comportamento histerético dos materiais, com clara interpretação física dos parâmetros envolvidos, é um importante desenvolvimento para a compreensão do modelo físico. Este aspecto, em conjunto com a sua simplicidade, permite reduzir o erro e melhorar a interpretação dos resultados.

## Referências

- [1] CEB Bull. 230 (1996) – RC elements under cyclic loading. Comité Euro-International du Beton, Lausanne, April 1996
- [2] Ferreira, M.; Lourenço, M.; Almeida, J.; Providência, P. (2022) – (3FME-SFM) Elemento Finito para Vigas de Betão Armado com Consideração do Respetivo Modelo de Campos de Tensões, Artigo submetido para JPEE2022, Porto.
- [3] Ferreira, M. (2021) – “Avaliação numérica de vigas de acoplamento sujeitas a acções cíclicas através de modelos de campos de tensões”, 2021, Tese de doutoramento, IST, Universidade de Lisboa.
- [4] Kenel, A.; Marti, P. (2002) – “Faseroptische Dehnungsmessungen an einbetonierten Bewehrungsstäben.” IBK-Rep. No. 271, ETH Zürich, Switzerland (in German).
- [5] Kenel, A.; Nellen, P.; Frank, A.; Marti, P. (2005) – “Reinforcing steel strains measured by Bragg grating sensors.” J. Mater. Civ. Eng., 10.1061/(ASCE)0899-1561(2005)17:4(423), 423–431.
- [6] Koppitz R., Kenel A, Keller, T. (2014) : Tension Chord Model Modification for Uniaxial Unloading and Reloading in Elastic and Plastic States, Journal of Structural Engineering, 2014 140(10): 04014077
- [7] Laurencet, P. (1999) – “Prestressing and minimal reinforcement for the control of the residual crack width.” PhD. Thesis, IBAP, École

Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Switzerland in French.

- [8] Lourenço M. (2010) – Modelos de Campos de Tensões Adaptativos, 2010, PhD Thesis, IST, Universidade Técnica de Lisboa.
- [9] Marti, P., Alvarez, M., Kaufmann W., Sigrist V. (1998): Tension Chord Model for Structural Concrete. *Structural Engineering International, Science and Technology* pp 287-298, April 1998
- [10] Mata-Falcón, J.; Tran, D.T.; Kaufmann, W.; Navrátil, J. (2018) – Computer-aided stress field analysis of discontinuity concrete regions, *Proceedings of the Computational Modelling of Concrete and Concrete Structures Conference (EURO-C 2018)*, Bad Hofgastein, Austria, 26 February – 1 March 2018, pp. 641-650.
- [11] Model Code 2010: fib 2013, Model Code for Concrete Structures 2010, Ernst & Sohn, Lausanne, Switzerland, 434 pp.
- [12] Muttoni and Fernandez (2007) – Concrete Cracking in Tension Members and Application to Deck Slabs of Bridges, *Journal of Bridge Engineering*, pp 646-653, ASCE September/October 2007.
- [13] Vecchio, F. J. (1999) – "Toward Cyclic Load Modeling of Reinforced Concrete", *ACI Structural Journal*, 96(2), 193-202.
- [14] Vestergaard D.; Larsen K.; Hoang L.; Poulsen P.; Feddersen B. (2021) – Design-oriented elasto-plastic analysis of reinforced concrete structures with in-plane forces applying convex optimization. *Journal of the fib, Structural Concrete*, Vol. 22, December 2021, pp 3272-3287, Lausanne, Switzerland.